О. Н. АФАНАСЬЕВА, Я. С. БРОДСКИЙ,
И. И. ГУТКИН, А. Л. ПАВЛОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ



О. Н. АФАНАСЬЕВА, Я. С. БРОДСКИЙ,
И. И. ГУТКИН, А. Л. ПАВЛОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1992

ББК 22.10
С23
УДК 51(075.3)

Сборник задач по математике для техникумов (на базе средней школы): Учеб. пособие: Для техникумов/О. Н. Афанасьева, Я. С. Бродский, И. И. Гуткин, А. Л. Павлов.— 2-е изд., перераб.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992.— 208 с.— ISBN 5-02-014648-X.

Содержит упражнения, необходимые для освоения основных понятий и связей между ними, выработки навыков решения типовых задач, расширения математического кругозора учащихся. Задачи снабжены ответами, а некоторые из них — указаниями к решению. В большинстве разделов даются краткие сведения по теории, приводятся образцы решения задач. В новом издании (1-е изд.— 1987 г.) усилена прикладная направленность задач.

Для учащихся техникумов, преподавателей.

Ил. 73.

С $\frac{1602010000-020}{053(02)-92}$ 50-92

ISBN 5-02-014648-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание несколько отличается от первого. Добавлено значительное число прикладных задач, ряд заданий переработан, некоторые задачи исключены.

Структура и содержание настоящего издания приведены в соответствие с учебным пособием Афанасьева О. А., Бродский Я. С., Павлов А. Л. Математика для техникумов.— М.: Наука, 1991. Вопросы для самоконтроля и повторения исключены из сборника задач в связи с тем, что они в более полном виде представлены в вышеназванном пособии.

Как и предыдущее, настоящее издание может быть использовано при изучении математики как на базе среднего образования, так и на базе основной школы, а также в классах общеобразовательной школы с углубленным изучением математики.

В настоящем издании начало и конец образцов решений задач отмечены соответственно символами □ и ■.

Авторы благодарят всех преподавателей математики техникумов, способствовавших улучшению сборника задач, а также сотрудников факультета повышения квалификации преподавателей средних специальных учебных заведений Донецкого госуниверситета, оказавших существенную помощь в оформлении рукописи.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемый сборник задач предназначен для учащихся средних специальных учебных заведений, обучающихся на базе средней общеобразовательной школы. Он написан в соответствии с действующей программой по математике. В нем учтены изменения в школьном курсе математики, касающиеся методических подходов к изучению основных понятий, терминологии, обозначений.

Сборник состоит из шести глав. Главы разбиты на параграфы и пункты. В конце каждого параграфа имеются вопросы для самоконтроля и повторения. Приводятся краткие теоретические сведения и образцы решения многих типовых задач.

Большинство задач снабжены ответами, к некоторым из них приведены указания.

Наиболее трудные задания отмечены звездочкой.

Настоящее пособие может быть использовано и при изучении математики на базе 8 классов, а также лицами, изучающими математику самостоятельно.

При работе над задачником большую помощь оказали слушатели факультета повышения квалификации преподавателей математики средних специальных учебных заведений Донецкого государственного университета. Всем им авторы выражают сердечную благодарность.

Авторы благодарны также рецензентам М. И. Шабунину и Ю. В. Нестеренко за ценные замечания, способствовавшие улучшению рукописи.

Глава I

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА

§ 1. Погрешности приближений. Вычисления на микрокалькуляторе

1. Точные и приближенные числа. Ввод чисел в микрокалькулятор (МК). При измерениях, а также зачастую в результате счета и операций над действительными числами получают приближенные значения величин. Числа, выражающие точное и приближенное значение величины, мы будем называть для краткости соответственно *точным* и *приближенным числом*.

1. Технические данные вертолета «Ми-8»: 1) число пассажирских мест 28; 2) масса ненагруженного вертолета 7,5 т; 3) крейсерская скорость 200 км/ч; 4) дальность полета 650 км; 5) число газотурбинных двигателей 2; 6) диаметр несущего винта 21,3 м; 7) высота вертолета 4,7 м. Какие из этих чисел являются точными и какие приближенными?

2. Какие из приведенных в примерах чисел можно отнести к точным, а какие к приближенным: 1) в техникуме учится 1200 учащихся; 2) в городе живет 522 тысячи человек; 3) заработок рабочего за май 178 руб.; 4) художественный музей за месяц посетило 3200 человек; 5) книжный фонд библиотеки техникума 30 тысяч книг; 6) станок состоит из 82 деталей; 7) скорость звука в воздухе при температуре 20 °С равна 393,1 м/с; 8) расстояние от Земли до Солнца $1,5 \cdot 10^8$ км?

3. Какие из перечисленных равенств являются точными, а какие приближенными:

1) $\sin 30^\circ = 0,5$; 2) $\operatorname{tg} 60^\circ = 1,73$; 3) $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$; 4) $\cos 45^\circ = 0,7$; 5) $\lg 2 = 0,3010$; 6) $\ln e = 1$; 7) $\sin(\pi/4) = 0,707$; 8) $\lg 100 = 2$; 9) $\operatorname{tg}(\pi/6) = 0,577$; 10) $\sin(\pi/2) = 1$; 11) $\ln 10 = 2,3026$.

4. Выполните ввод чисел в МК:

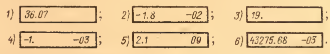
1) 274; 2) 3586; 3) 456 937; 4) 24,37; 5) 1,376, 6) 0,543; 7) 0,000983; 8) 0,000654; 9) 234 567 891; 10) $2{,}46\cdot10^5$; 11) $3{,}574\cdot10^5$; 12) $2{,}4\cdot10^{-3}$; 13) $5{,}69\cdot10^{-12}$; 14) $1{,}8\cdot10^{-22}$; 15) $3{,}213\cdot10^{12}$; 16) $-45{,}65$; 17) $-7{,}132\cdot10^{43}$; 18) $-27\ 631$; 19) $-3{,}2\cdot10^{-101}$.

Какие из этих чисел на вашем МК ввести нельзя?

5. Как будут высчитываться на индикаторе вашего микрокалькулятора числа:

1) 25; 2) $-123\ 456\ 789$; 3) $-0{,}00123$; 4) 1,365; 5) $-0{,}5$; 6) $362{,}57\cdot10^5$; 7) $9746{,}351\cdot10^{-3}$; 8) $25{,}92\cdot10^{-8}$?

6. На индикаторе микрокалькулятора высвечиваются числа:



Запишите их, используя естественную запись числа.

7. Какие числа введены в регистр X с помощью следующих программ:

1) | 7 | • | 2 | 3 | /-/ |, 2) | 3 | 2 | • | 7 | ВП | 0 | 2 |,

3) | 0 | • | 9 | 3 | ВП | 0 | 3 | /-/ |, 4) | 1 | • | 4 | 3 | /-/ | ВП | 0 | 1 |,

5) | 7 | • | 1 | 8 | /-/ | ВП | 1 | 0 |.

2. Абсолютная погрешность и ее граница. Запись приближенного числа. Разность $x-a$ между точным числом x и приближенным a называется *погрешностью приближения*. Если погрешность отрицательная, то говорят, что приближение взято с избытком, если положительна,— с недостатком. Модуль погрешности называется *абсолютной погрешностью* и обозначается $\Delta_a x$ или Δ_a:

$$\Delta_a x = |x-a|.$$

Число h_a, которое не меньше абсолютной погрешности $\Delta_a x$, называется *границей абсолютной погрешности:*

$$\Delta_a x \leqslant h_a;\quad |x-a|\leqslant h_a,\quad x-h_a\leqslant a\leqslant x+h_a.$$

Если задана граница абсолютной погрешности h_a, то говорят, что число a есть приближенное значение x с точностью до h_a, и записывают $x=a\pm h_a$.

Цифра приближенного числа a, записанного в виде десятичной дроби, называется *верной (точной)*, если абсолютная погрешность $\Delta_a x$ приближения не превыша-

ет единицы того разряда, в котором стоит эта цифра. В противном случае она называется *сомнительной.*

Запись чисел с сохранением только верхних цифр широко используется во всех математических таблицах, в физике, астрономии, технике. При этом по записи приближенного числа можно оценить погрешность приближения.

Если целое число содержит в конце нули, не являющиеся верными цифрами, то их заменяют множителем 10^p, где p — число таких нулей. Число в *стандартном виде* записывают так:

$$a = a_0, a_1 a_2 \dots a_k \cdot 10^m, \text{ где } 1 \leqslant a_0 < 10,$$

$a_0, a_1, \dots, a_k$ — все верные цифры числа. Показатель m называется *порядком числа.*

Если число, записанное в виде десятичной дроби, содержит только верные цифры, то все его цифры, начиная с первой слева, отличной от нуля, называются *значащими.*

Чтобы округлить число до n-го разряда, нужно цифры, стоящие правее этого разряда, отбросить, если $n<0$, или заменить нулями, если $n>0$. Такое округление называется *округлением по недостатку*. Если же цифру n-го разряда увеличить на единицу, то получим *округление по избытку*.

Если не оговорено, какое округление произведено, то будем считать, что взято округление по недостатку, если цифра первого отбрасываемого разряда меньше 5, и по избытку, если она больше или равна 5. В этом случае абсолютная погрешность округления не превосходит половины единицы соответствующего разряда. Такое округление будем называть *округлением с наименьшей погрешностью.*

8. Укажите погрешность, которая получится, если число 7,341 заменить числом:

1) 7,3; 2) 8; 3) 7,34; 4) 7,4; 5) 7,35; 6) 7.

9. Укажите абсолютную погрешность приближения для следующих приближенных равенств:

1) $0{,}79 \approx 0{,}8$; 2) $35{,}47 \approx 35{,}5$; 3) $203 \approx 200$.

10. Стороны прямоугольника равны 8 и 6 см. После измерения диагонали линейкой получили результат 9,9 см. Какова абсолютная погрешность этого приближения?

11. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15 см. После измерения линейкой радиусов окружностей,

описанной около этого треугольника и вписанной в этот треугольник, получили соответственно результаты 8 и 4,1 см. Найдите абсолютные погрешности этих приближений.

12. Дано, что $3,5<a<4,7$. Верно ли, что:

1) $3<a<4,5$; 2) $3,8<a<4$;

3) $3,6<a<4,9$; 4) $3,2<a<4,8$?

13. При нормальном давлении температура плавления: 1) алюминия — 660,4 °C; 2) висмута — 271,44 °C; 3) вольфрама — 3387 °C; 4) золота — 1064,43 °C; 5) калия — 63,6 °C; 6) олова — 231,9681 °C. Укажите число значащих цифр и число десятичных знаков в каждом из этих чисел. Запишите эти числа в стандартном виде.

14. В записи следующих чисел все нули справа — сомнительные цифры. Запишите эти числа без незначащих нулей: 7800 Дж; 9 200 000 Дж; 6 600 000 Ом; 11 200 Вт; 0,00237 Н.

15. Найдите границы абсолютных погрешностей: 1) постоянной Планка $h=6,626176\cdot10^{-34}$ Дж·с; 2) числа Авогадро $N_0=6,022045\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$; 3) массы покоя электрона $m_e=9,109534\cdot10^{-31}$ кг; 4) гравитационной постоянной $G=6,6720\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2; 5) температуры кипения золота 2700 °C.

16. Запишите в виде двойного неравенства:

1) $7,6\pm0,2$; 2) $27,3\pm0,9$; 3) 127 ± 3; 4) $43\pm0,7$.

17. В лаборатории измеряются результаты испытаний ударной вязкости цилиндрических образцов из малоуглеродистой стали с точностью до 0,1 кгм/см^2. Изделие прошло испытание, если ударная вязкость находится в промежутке $11,0<a<11,8$. Прошло ли изделие испытание, если его ударная вязкость оказалась равной: 1) 11,2 кгм/см^2; 2) 10,9 кгм/см^2; 3) 11,7 кгм/см^2; 4) 12,2 кгм/см^2?

18. Сколько значащих цифр имеет каждое из следующих приближенных чисел, данное с точностью до единицы: 243; 485,1; 370; 23,05; 17,0; 6,1; 80; 800?

19. Округлите числа с недостатком, с избытком, с наименьшей погрешностью с заданной точностью:

1) 1,5783; 23,4997; 0,00025; 0,07964 до 10^{-3};

2) 4,761; 31,009; 471,2583; 0,00126 до 10^{-2};

3) 159 734; 28,34; 7 654 321; 984,56 до 10^3.

Найдите погрешность округления.

20. Даны приближенные числа 2345 ± 53; $23,56\pm0,3$; $87,394\pm0,0003$; $9,36\pm0,07$; $2,563\pm0,05$.

1) Укажите их верные цифры.

2) Округлите их, сохранив в них только верные цифры, укажите точность полученных приближений.

3. Выполнение арифметических действий с помощью микрокалькулятора.

21. Выполните действия с приближенными данными:

1) $12{,}384+42{,}1083-51{,}27$;
2) $24{,}396-0{,}2834-7{,}64157$;
3) $0{,}00857+0{,}024-0{,}03972$;
4) $1{,}5\cdot10^6+2{,}35\cdot10^4-3{,}17\cdot10^5$;
5) $3{,}74\cdot0{,}858\cdot6{,}12$;
6) $2{,}346782\cdot0{,}0989172\cdot88{,}374652$;
7) $100{,}21\cdot237{,}4+0{,}2834\cdot0{,}01287$;
8) $23{,}67:7{,}85-31{,}3:2{,}46$;
9) $\frac{34{,}72\cdot0{,}05876}{9{,}7385}$; 10) $\frac{63{,}792\cdot0{,}02453\cdot723{,}54}{83{,}425\cdot0{,}7653}$;
11) $125{,}37\cdot4{,}5897+13{,}4896:0{,}12493$;
12) $\frac{4{,}12\cdot10^2\cdot5{,}93\cdot10^{-3}}{7{,}42\cdot10^{-2}}$;
13) $\frac{2{,}3579\cdot10^4\cdot4{,}7003\cdot10^3}{1{,}59867\cdot10^5}+\frac{1{,}7821\cdot10^2\cdot3{,}4591\cdot10^3}{2{,}7186\cdot10}$.

22. С каким ускорением $a=F/m$ двигался при разбеге реактивный самолет массой $m\approx60{,}5$ т, если сила тяги двигателей $F\approx92{,}3$ кН?

23. Для окраски пола размером $12{,}0\times4{,}0$ м^2 израсходовано 5,28 кг краски. Сколько потребуется краски для окраски пола комнаты размером $5{,}2\times4{,}6$ м^2?

24. Определите, с какой силой надо давить на малый поршень гидравлической машины площадью 12 см^2, чтобы на большом поршне площадью 125 см^2 получить силу 455 Н. Указание. Без учета трения сила давления пропорциональна площади поршня.

25. Составьте программы для вычисления выражений:

1) $ab+c$; 2) $a(b+c)$; 3) $(a+b)(c+d)$; 4) $\frac{a}{b+c}$; 5) $\frac{a+b}{c}$;
6) $\frac{a+b}{c}+\frac{d+e}{f}$; 7) $\frac{a+b}{c+d}$.

26. Запишите выражение, значение которого можно вычислить по следующей программе на указанном микрокалькуляторе (и ему подобных):

1) | a | × | b | + | c | × | d | /-/ | = |, Б3-18, Б3-18М, Б3-32;

2) | a | ↑ | b | + | d | × | e | ÷ |, МК-61.

27. Составьте программы перехода от градусной меры к радианной и наоборот.

28. Вычислите с точностью до 10^{-3}:

1) $4{,}371+5{,}229$;	2) $3{,}598\cdot 4{,}713$;	3) $0{,}471:2{,}35$;
$4{,}371+7{,}462$;	$3{,}598\cdot 12{,}54$;	$0{,}471:12{,}7$;
$4{,}371+3{,}184$;	$3{,}598\cdot 168{,}4$;	$0{,}471:0{,}325$;
$4{,}371-21{,}595$;	$3{,}598\cdot 0{,}8952$;	$0{,}471:0{,}00743$;
$4{,}371-2{,}196$;	$3{,}598\cdot 0{,}004731$;	$0{,}471:1250$.

29. Представьте следующие числа в виде десятичной дроби с точностью до 0,0001 и найдите абсолютную погрешность приближений:

1) $\frac{5}{13}$; 2) $\frac{15}{17}$; 3) $\frac{7}{41}$; 4) $4\frac{3}{23}$.

4. Относительная погрешность и ее граница. Отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного числа называется *относительной погрешностью приближения* и обозначается $\omega_a x$ или ω_a:

$$\omega_a x=\frac{\Delta_a x}{|a|}.$$

Относительная погрешность является показателем качества данного приближения, и ее часто выражают в процентах. Число E_a, которое не меньше относительной погрешности $\omega_a x$, называется *границей относительной погрешности:*

$$E_a\geqslant\omega_a x.$$

Так как

$$\frac{h_a}{|a|}\geqslant\frac{\Delta_a}{|a|}=\omega_a x,$$

то $h_a/|a|$ можно принять за границу относительной погрешности. Если дана граница E_a относительной погрешности, то говорят, что приближение дано с относительной точностью до E_a, и записывают:

$$x=a\pm(E_a)\ \text{ или }\ x=a\pm(100E_a\,\%).$$

30. Укажите относительную погрешность, которая получится, если число 6,572 заменить числом:

1) 6,6; 2) 7; 3) 6,57; 4) 6,5; 5) 6,58; 6) 6.

31. Стороны параллелограмма равны 11 и 12 см, меньшая диагональ — 13 см. В результате измерения линейкой большей диагонали получили 18,9 см. Какова относительная погрешность этого приближения?

32. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 24 см, а боковой стороны — 15 см. В результате измерения линейкой радиусов вписанной и описан-

ной окружностей получили соответственно 4,1 и 12,3 см. Найдите относительные погрешности этих приближений.

33. Скорость света в вакууме ($299792{,}5 \pm 0{,}4$) км/с, а скорость звука в воздухе ($331{,}63 \pm 0{,}004$) м/с. Что измерено с большей точностью?

34. Найдите границы значений грузоподъемности автомобиля ГАЗ-51А, если она равна 2,5 ($\pm 15\%$) т.

35. Найдите границы относительной погрешности чисел:

1) 2; 0,2; 0,02; 2) 17; 1,7; 0,17; 3) 3,71; 37,1; 371.

36. Какая из характеристик самолета «Ан-24» дана точнее: размах крыла 29,2 м; взлетная масса 21 т; собственная масса 13,9 т; практический потолок высоты 8,9 км?

37. Округлите число до десятых и найдите абсолютную и относительную погрешности округления:

1) 6,87; 2) 83,42; 3) 71,679; 4) 0,342.

38. По табличным данным, приведенным в упражнении 15, оцените их относительную погрешность.

39. Даны числа:

$$\frac{3}{17};\quad 3\frac{5}{14};\quad \frac{8}{27}.$$

1) Представьте их в виде десятичной дроби с точностью до 0,001.

2) Найдите относительную погрешность приближений.

40. Найдите относительную погрешность приближенного значения a величины x, если:

1) $x=\frac{1}{7}$, $a=0{,}143$; 2) $x=\frac{3}{11}$, $a=0{,}273$;

3) $x=\frac{5}{13}$, $a=-0{,}384$; 4) $x=\frac{2}{3}$, $a=0{,}667$.

41. Докажите, что относительная погрешность приближенного числа не превосходит:

1) 10%, если в его записи две значащие цифры;

2) 1%, если в его записи три значащие цифры.

42. Оцените относительную погрешность частного от деления a и b, если его взять с k значащими цифрами:

1) $a=11$, $b=13$, $k=2$; 2) $a=24$, $b=17$, $k=3$;

3) $a=35$, $b=17$, $k=3$; 4) $a=173$, $b=11$, $k=4$.

43. Сколько десятичных знаков нужно взять в частном от деления a на b, чтобы оно имело относительную погрешность не более $p\%$, если:

1) $a=12$, $b=17$, $p=0{,}3$; 2) $a=15$, $b=7$, $p=0{,}02$;
3) $a=40$, $b=13$, $p=0{,}5$; 4) $a=125$, $b=43$, $p=0{,}7$?

44. Вычислите a/b с относительной погрешностью, не превосходящей p %, если:
1) $a=36{,}537$, $b=3{,}2417$, $p=4$;
2) $a=83{,}2$, $b=143{,}7$, $p=2$.

§ 2. Практические приемы приближенных вычислений

5. Вычисления с приближенными данными. При оценке границ погрешностей результатов действий по границам погрешностей исходных данных пользуются следующими правилами.

1. При сложении и вычитании границы абсолютных погрешностей исходных данных складываются.
2. При умножении и делении границы относительных погрешностей исходных данных складываются.
3. При возведении в степень граница относительной погрешности основания степени умножается на показатель степени.

Действия с приближенными числами на практике выполняют по более простым правилам, позволяющим получать достаточную точность при меньшей вычислительной работе.

Они называются *правилами подсчета цифр.*

1) При сложении и вычитании десятичных дробей в результате сохраняют столько десятичных знаков, сколько их в числе с наименьшим числом десятичных знаков.

При сложении и вычитании целых чисел их записывают в стандартном виде и, вынося за скобки наибольшую степень десяти, используют вышеприведенное правило.

2) При умножении и делении приближенных чисел в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в числе с наименьшим числом значащих цифр.

3) В промежуточных вычислениях сохраняют на одну цифру больше, чем это рекомендуется предыдущими правилами. В окончательном результате эта запасная цифра округляется.

4. Если данные имеют различное число десятичных знаков (при сложении и вычитании) или значащих цифр (при остальных действиях), то их округляют до наименее точного числа с одной запасной цифрой, которая в окончательном результате округляется.

45. Оцените $a+b$ и $a-b$, если:
1) $3{,}84<a<3{,}92$ и $4{,}17<b<4{,}23$;
2) $274<a<280$ и $126<b<128$;
3) $a=0{,}351\pm0{,}0004$ и $b=0{,}473\pm0{,}0007$;
4) $a=3{,}5\cdot10^4\pm873$ и $b=2{,}1\cdot10^4\pm157$;
5) $a=124(\pm5\%)$ и $b=23(\pm3\%)$;
6) $a=0{,}056(\pm0{,}3\%)$ и $b=0{,}074(\pm0{,}4\ \%)$.

46. Две силы, модули которых равны 0,860 Н и 0,855 Н, приложены к одной точке и действуют по одной прямой. Найдите модуль равнодействующей, если силы направлены: 1) в одну сторону; 2) в противоположные стороны.

47. Участок цепи состоит из 4 последовательно соединенных резисторов сопротивлением $r_1\approx3{,}865$ Ом, $r_2\approx4{,}45$ Ом, $r_3\approx0{,}60$ Ом, $r_4\approx2{,}0$ Ом. Найдите общее сопротивление этого участка цепи.

48. Каково общее сопротивление внешнего участка цепи, состоящего из потребителя сопротивлением 305 Ом и соединительных проводов сопротивлением 0,37 Ом? Истолкуйте физический смысл ответа.

49. Выполните действия:
1) $1{,}038+12{,}5+2{,}349845$;
2) $4{,}00793+3{,}57999-2{,}74$;
3) $7{,}4+3{,}599-0{,}00017$;
4) $7{,}84\cdot10^5+2{,}639\cdot10^4-6{,}7983\cdot10^6$;
5) $27\,100+8250+58\,117-4931{,}96$;
6) $3{,}92\cdot10^{-3}-2{,}74\cdot10^{-2}+1{,}2\cdot10^{-1}$.

50. Периметр прямоугольника 28,36 м, одна из его сторон 4,963 м. Найдите длину другой стороны.

51. Чему равно сопротивление цепи, состоящей из 6 последовательно соединенных резисторов сопротивлением 30 Ом каждый? Каким будет сопротивление, если их соединить параллельно?

52. Оцените границы произведения приближенных чисел:
1) $13{,}2<a<13{,}4$ и $7{,}5<b<7{,}6$;
2) $a=15{,}3\pm0{,}05$ и $b=4{,}8\pm0{,}03$;
3) $0{,}98<a<1{,}01$ и $0{,}037<b<0{,}041$;
4) $a=274\pm13$ и $b=1{,}2\pm0{,}7$;
5) $a=0{,}00386(\pm0{,}2\ \%)$ и $b=4{,}52(\pm0{,}3\ \%)$.

53. За какое время свет проходит расстояние от Солнца до Земли, равное $1{,}50\cdot10^8$ км, если скорость света $3{,}00\times10^5$ км/с? С какой точностью получен ответ?

54. Найдите произведение приближенных чисел и запишите его в стандартном виде:

1) $2{,}34 \cdot 0{,}027$; 2) $4{,}75 \cdot 10^4 \cdot 3{,}596 \cdot 10^{-2}$;
3) $1789{,}2 \cdot 0{,}342 \cdot 0{,}0052$; 4) $13\,567 \cdot 0{,}2834$;
5) $42{,}7683 \cdot 10^2 \cdot 1{,}592 \cdot 10^{-3}$; 6) $413 \cdot 5{,}672 \cdot 0{,}98$.

55. Найдите частное приближенных чисел:
1) $173:24{,}567$; 2) $34{,}75:2{,}6891$;
3) $0{,}0028:0{,}345897$; 4) $2{,}57 \cdot 10^4:(3{,}28 \cdot 10^{-2})$;
5) $4{,}735 \cdot 10^{-2}:(1{,}26897 \cdot 10^{-5})$; 6) $2{,}39:8{,}514:1{,}7$;
7) $5{,}74 \cdot 10^5 \cdot 3{,}5964 \cdot 10^3:0{,}0073$.

56. С какой точностью надо измерить длину стороны квадрата, чтобы при вычислении его площади граница: 1) абсолютной погрешности не превышала 0,5 см^2; 2) относительной погрешности не превышала 1 %? Грубое измерение стороны квадрата дало $a \approx 12$ см.

57. С какой точностью следует измерить длины сторон a и b прямоугольника, чтобы граница относительной погрешности вычисленной площади не превышала 1,5 %? Грубое измерение дало $a \approx 6$ м, $b \approx 8$ м.

□ Площадь прямоугольника вычисляется по формуле $S = a \cdot b$. Следовательно, $E_S = E_a + E_b$. Заданное значение $E_S = 1{,}5\,\%$ распределим поровну между E_a и E_b: $E_a = 0{,}75\,\%$, $E_b = 0{,}75\,\%$. Тогда

$$h_a = E_a \cdot |a| = 0{,}0075 \cdot 6 = 0{,}045 \text{ м} = 4{,}5 \text{ см};$$
$$h_b = E_b \cdot |b| = 0{,}0075 \cdot 8 = 0{,}06 \text{ м} = 6 \text{ см}. \ ■$$

58. С какой точностью надо измерить радиус основания r и высоту h прямого кругового цилиндра и со сколькими значащими цифрами взять π, чтобы при вычислении его объема $V = \pi r^2 h$ граница относительной погрешности не превышала 2 %? Грубое измерение дало $R \approx 32$ см и $h \approx 61$ см.

59. Сила F гравитационного взаимодействия Земли и Луны вычисляется по формуле

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где m_1 и m_2 — массы соответственно Земли и Луны, кг; r — среднее расстояние между ними, м; γ — гравитационная постоянная, Н $\cdot$ м^2/кг^2.

1) Вычислите F по следующим данным: $m_1 \approx \approx 5{,}98 \cdot 10^{24}$; $m_2 \approx 7{,}35 \cdot 10^8$; $\gamma \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}$; $r \approx 3{,}84 \cdot 10^8$.

2) Оцените относительную погрешность результата.

60. Количество теплоты Q, выделяемой в проводнике, вычисляется по формуле

$$Q = I^2 Rt,$$

где I — сила тока в проводнике, А; R — сопротивление проводника, Ом, t — время, с.

1) Вычислите Q по следующим данным: $R\approx 25$, $I\approx 0{,}45$, $t\approx 12{,}5$.

2) Оцените относительную погрешность результата.

6. Вычисление значений элементарных функций. При вычислении значений некоторых функций на практике можно пользоваться следующими правилами подсчета цифр.

5. При возведении в квадрат и куб в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в основании степени.

6. При извлечении квадратного и кубического корня в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в подкоренном выражении.

61. Выполните действия:

1) $3{,}57^2$; 2) $45{,}9^2$; 3) 1473^2; 4) $0{,}268^2$; 5) $0{,}03974^2$;
6) $542{,}37^2$; 7) $(2{,}5874\cdot 10^{-2})^2$; 8) $0{,}00005867^2$;
9) $2{,}53^3$; 10) $41{,}7^3$; 11) 523^3; 12) $18{,}56^3$; 13) $2{,}46803^3$;
14) $0{,}391^3$; 15) $0{,}0007835^3$; 16) $(2{,}37\cdot 10^2)^3$;
17) $0{,}5397219^3$; 18) $0{,}00297^3$; 19) $(2{,}508\cdot 10^4)^3$.

62. Вычислите:

1) $\sqrt{1{,}753}$; 2) $\sqrt{39{,}251}$; 3) $\sqrt{0{,}0289}$; 4) $\sqrt{0{,}000064234}$;
5) $\sqrt{3{,}46\cdot 10^5}$; 6) $\sqrt[3]{2{,}35}$; 7) $\sqrt[3]{17{,}41}$;
8) $\sqrt[3]{0{,}00059342}$; 9) $\sqrt[3]{9{,}54\cdot 10^5}$; 10) $\sqrt[3]{3{,}7124\cdot 10^{-4}}$;
11) $1:395$; 12) $1:0{,}0371$.

63. По формуле $T=2\pi\sqrt{l/g}$ вычислите период колебания маятника длиной $l\approx 120{,}0$ см. Ускорение силы тяжести $g\approx 9{,}81$ м/с^2.

64. Цилиндр диаметром $(2\pm 0{,}01)$ см и высотой $(11\pm 0{,}02)$ см имеет массу, равную $(93{,}4\pm 0{,}001)$ г. Определите плотность материала, из которого сделан цилиндр.

65. Вычислите с точностью до 0,001:

1) $\sin 12^\circ$; 2) $\sin 15^\circ 36'$; 3) $\sin\frac{\pi}{5}$; 4) $\cos\frac{2\pi}{7}$;

5) $\cos 27^\circ 47'$; 6) $\sin 763^\circ$; 7) $\cos\frac{7\pi}{3}$; 8) $\operatorname{tg} 37^\circ 25'$; 9) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$;

10) $\operatorname{ctg} 7^\circ 38'$; 11) $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{13}$; 12) $\operatorname{ctg}\frac{8\pi}{17}$; 13) $\lg 7{,}234$;

14) $\lg 0{,}058$; 15) $\ln 178{,}35$; 16) $\ln 31{,}29$; 17) $10^{1{,}84}$;

18) $e^{0{,}541}$; 19) $10^{-0{,}5463}$; 20) e^{-47}; 21) $e^{4{,}2}$; 22)* e^{-235};

23) $3{,}7^4$; 24) $0{,}596^{2{,}34}$; 25) $34{,}2^{-0{,}71}$;

26) $5{,}9843^{-1{,}342}$; 27)* $7{,}2^{1\frac{5}{7}}$.

66. Решите прямоугольный треугольник ($\gamma=90^\circ$, c — гипотенуза, a и b — катеты, противолежащие соответственно углам α и β) по следующим данным:

1) a; α; 2) $a=2{,}34$; $\alpha=17^\circ42'$.

С какой точностью достаточно взять $\operatorname{tg}\alpha$, чтобы при вычислении второго катета относительная погрешность не превышала 1 %?

3) $b=0{,}04794$; $\alpha=40^\circ23'$;

4) c, α; 5) $c=175{,}3$; $\beta=34^\circ15'$.

С какой точностью достаточно взять $\sin\beta$, чтобы при вычислении катета b относительная погрешность не превышала 1 %?

6) $c=0{,}291$; $\alpha=72^\circ36'$; 7) a; b; 8) $a=24{,}5$; $b=78{,}3$;

9) $a=0{,}0059341$; $b=0{,}0078261$; 10) a; c;

11) $c=72{,}308$; $b=51{,}462$; 12) $c=0{,}29$; $a=0{,}18$.

67. Решите треугольник (α, β, γ — углы треугольника, a, b, c — противолежащие им стороны) по следующим данным:

1) a; α; β; 2) $b=3{,}28$; $\alpha=28^\circ36'$; $\gamma=59^\circ12'$;

3) $c=0{,}2479$; $\alpha=43^\circ18'$; $\gamma=53^\circ$; 4) a; b; c;

5) $a=17{,}28$; $b=19{,}34$; $c=23{,}52$;

6) $a=0{,}0172$; $b=0{,}0253$; $c=0{,}0321$;

7) α; a; b; 8) $\gamma=57^\circ43'$; $c=13{,}4$; $a=11{,}8$;

9) $b=0{,}3467$; $c=0{,}5218$; $\beta=38^\circ24'$; 10) a; b; γ;

11) $b=3417$; $c=2853$; $\alpha=17^\circ22'$; 12) $a=0{,}34$; $c=0{,}27$; $\beta=72^\circ19'$.

68. Вычислите с точностью до 10^{-4} значения функции в указанных точках:

1) $f(x)=3\sin 2x+5{,}2$ при $x=\pi/12$; $\pi/6$; $\pi/4$;

2) $\varphi(x)=5\cos x-12\sin x$ при $x=15^\circ$; 17°; 19°; 21°;

3) $y=9e^{3x}-7{,}54$ при $x=-0{,}5$; $-0{,}25$; 0; 0,25; 0,5; 0,75;

4) $y=0{,}2t^3-3{,}4t^2+2{,}5$ при $t=0$; 1,5; 1,75; 1,934;

5) $f(x)=\dfrac{1-2\cos x}{2x}$ при $x=-0{,}3$; $-0{,}25$; 0,753; 1,3452;

6) $S=5{,}41\ln(2{,}31t+1{,}74)+4{,}89$ при $t=1$; 1,001; 1,01; 1,1;

7) $y=2e^{-10t}\sin(30t+0{,}6)$ при $t=0$; 1; 2,5.

69. Составьте программы для вычисления выражений:

1) a^2+b^2; 2) a^2-b^2; 3) $(a+b)^2$; 4) a^3+b^3;

5) $(a+b)^3$; 6) b^2-4ac; 7) $\sqrt{a^2+b^2}$; 8) $\sqrt{a^2-b^2}$;

9) $\sqrt{b^2-4ac}$.

70. Не пользуясь МК, оцените результаты вычисления выражения:

1) $350 \cdot 0{,}151 : 0{,}625$;

2) $\frac{7{,}6 \cdot 4{,}2^2}{2}$; 3) $\frac{18 \cdot 21}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 12\,500^2}$;

4) $\frac{3 \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{32 \cdot 3{,}14 \cdot (6{,}7 \cdot 10^{-11})^3 \cdot 4 \cdot 10^{11}}$.

Проверьте ответ с помощью МК.

7. Использование регистров памяти.

71. Составьте программы для вычисления значений многочлена:

1) ax^2+bx+c;

2) $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$.

Указание. Представьте многочлен в виде:

$$(((ax+b)x+c)x+d)x+e.$$

72. Найдите значение многочлена с точностью до 10^{-4}:

1) $P(x)=2x^3-3x^2+5x-7$ при $x=2{,}74$; $-4{,}519$; $5{,}732 \cdot 10^2$.

2) $P(x)=2{,}72x^4+3{,}52x^3-4{,}28x^2-1{,}17x-3$ при $x=1{,}12$; $-8{,}371$.

73. Вычислите значения дробно-рациональной функции с точностью до 10^{-4}:

1) $Q(x)=\frac{4x^2-7x+3}{2x^2+5x-7}$ при $x=-3{,}8$; $4{,}713$.

2) $R(x)=\frac{1{,}3x^3-2{,}7x^2+4{,}1x-5{,}2}{3{,}6x^2+2{,}3x-6{,}7}$ при $x=0$; 2; $-1{,}41$; $2{,}308$.

74. Вычислите с точностью до 10^{-4} приращение функции $f(x)$ при изменении аргумента от $x_0=0$ до x_1 ($x_1=1$; $0{,}5$; $0{,}3$; $0{,}1$; $0{,}05$; $0{,}02$; $0{,}01$). Найдите отношение приращения функции к соответствующему приращению аргумента:

1) $f(x)=1+2x-x^2$;

2) $f(x)=x^3-3x^2+7x+1$;

3) $f(x)=5{,}1x^3-4{,}2x^2+1{,}8x-2{,}3$.

75. Найдите члены последовательности (a_n) с точностью до 10^{-4} при заданных значениях n:

1) $a_n=\frac{3n^2-2n+4}{5n^2-7n+1}$, $n=3$; 13; 23; 33; 43; 53;

2) $a_n=\frac{4n^2-5n+7}{2n^2+3n-4}$, $n=2$; 12; 22; 32; 42; 52;

3) $a_n = \frac{4{,}5672n + 2{,}7816}{3n - 0{,}4579}$, $n = 51$; 52; 53; 55;

4) $a_n = \frac{23{,}7841n + 3{,}2159}{4{,}7184n - 2{,}3951}$, $n = 65$; 75; 85; 95.

76. Решите систему уравнений с точностью до 10^{-3}:

$$\begin{cases} 11{,}04x - 10{,}49y = 1, \\ 10{,}49x - 10{,}04y = 0. \end{cases}$$

Затем решите систему, предварительно округлив коэффициенты: 1) до двух; 2) до трех значащих цифр. Сравните полученные результаты.

77. Найдите корни уравнения с точностью до 10^{-3}:
1) $5x^2 - 7x + 1 = 0$; 2) $12x^2 + 4x - 15 = 0$;
3) $-3{,}7x^2 - 2{,}1x + 1{,}4 = 0$; 4) $4{,}8x^2 + 7{,}3x - 8{,}2 = 0$;
5) $17{,}5x^2 - 12{,}5x - 24{,}1 = 0$; 6) $0{,}358x^2 - 0{,}642x - 0{,}541 = 0$.

Глава 2

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 3. Алгебраическая форма комплексного числа

8. Понятие комплексного числа. *Комплексные числа* имеют вид $a+bi$, где a и b — действительные числа, i — некоторый символ, удовлетворяющий условию $i^2=-1$.

Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ называются *равными* тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$. Действительные числа a и b называются соответственно *действительной и мнимой частью комплексного числа* $z=a+bi$. Комплексные числа вида $a+0i$ отождествляются с действительными числами a. Комплексные числа вида $0+bi$ обозначают bi и называют *чисто мнимыми числами*. Способ записи комплексных чисел в виде $a+bi$ называется *алгебраической формой комплексного числа*.

Сложение и умножение комплексных чисел определяются следующим образом:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$$
$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Пример 1. Найти комплексное число z из уравнения

$$(1+i)z=-2+3i.$$

□ Пусть $z=x+yi$. Тогда $(1+i)(x+yi)=-2+3i$. Выполнив умножение в левой части, получим $(x-y)+$ $+(x+y)i=-2+3i$. Из условия равенства двух комплексных чисел имеем

$$\begin{cases} x-y=-2, \\ x+y=3. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $x=0{,}5$; $y=2{,}5$; $z=0{,}5+2{,}5i$. ■

78. Какие из следующих уравнений имеют и какие не имеют корней на множестве действительных чисел:
1) $x^2-7x+11=0$; 2) $2x^2-4x+7=0$; 3) $x^2+x-5=0$;
4) $3x^2-4x+1=0$; 5) $x^2-x+5=0$; 6) $x^2+2x+1=0$?

79. Найдите действительные значения x, при которых данное комплексное число является чисто мнимым:

1) $(x+3)+(-2i)$; 2) $(5x-2)+2i$; 3) $(9-x^2)+3i$;
4) $(3x^2+9x)+4i$; 5) $(x^2-2x+3)+i$;
6) $(3-x)\sqrt{x^2-7x+10}+(-5i)$.

80. Найдите действительные значения x, при которых данное комплексное число является действительным:

1) $-3+(2-x)i$; 2) $1+(1-16x^2)i$; 3) $4+(x^3-25x)i$;
4) $-2+(2x^2-x-3)i$; 5) $5+(x+2)\sqrt{x}\,i$;
6) $-1+\frac{x-2}{x^2-4}i$.

81. Найдите действительные числа x и y из равенств:

1) $-\frac{2}{y}+xi=3$; 2) $x^2-3(x+1)+2i=yi-5$;
3) $(-2x+3y)+(2x-y)i=1+i$;
4) $(x-y)+(3x+2y)i=4+2i$.

82. Выполните действия:

1) $(4-3i)+(-2+i)$; 2) $(5+6i)+(7-6i)$;
3) $(-0{,}7+0{,}3i)+(0{,}9-1{,}7i)$; 4) $(-0{,}4-2{,}1i)+(0{,}6+3i)$
5) $\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$; 6) $(2+3i)(6-5i)$;
7) $(-3+2i)\cdot 2+(7-5i)3$; 8) $(0{,}2-0{,}3i)(0{,}4+0{,}5i)$;
9) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}i\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i\right)$; 10) $(2-3i)^2$; 11) $(-1+i)^2$;
12) $3+i+(-2+5i)(-1-2i)$; 13) $(3-2i)(1+4i)+(-6-i)$;
14) $(4-5i)(-2+3i)+(1+2i)(-3+4i)$;
15) $(5+i)(15-3i)$.

83. Найдите действительные числа x и y из уравнений:

1) $(1+i)x+(1-i)y=3-i$; 2) $(2-i)x+(1+i)y=5-i$;
3) $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$;
4) $(x+3yi)+\left(\frac{3}{2}y+2xi\right)=4+8i$;
5) $\frac{i}{x}+\frac{i}{y}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{5i}{y}$;

6) $x+y+ixy=1$; 7) $x+y+ixy=i$.

84. Решите уравнения:

1) $(2-5i)z=2+5i$; 2) $(2+5i)z=2-5i$.

85. Покажите, что для любого целого числа k справедливы равенства $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$.

86. Вычислите:

1) $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56}$; 2) $i+i^2+i^3+i^4+i^5$;

3) $i^3+i^{13}+i^{23}+i^{33}+i^{43}$; 4)* $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{100}$;

5) $i^k+i^{k+1}+i^{k+2}+i^{k+3}$, где $k\in N$.

87. Найдите значение многочлена:

1) $x^{25}-8x^{14}+5x^4-4x^2-10$ при $x=i$;

2) x^3+x^2+x+1 при $x=1+i$.

88*. Найдите чисто мнимые числа u и v из равенств:

1) $u+iv=-3+2i$; 2) $5u-6iv=-24-5i$;

3) $(1-i)u+(2+i)v=1+4i$; 4) $(2+i)u+(-1-2i)v=2+2i$.

9. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Каждому комплексному числу $z=a+bi$ можно сопоставить точку плоскости с координатами $(a; b)$. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости. Это соответствие позволяет комплексные числа называть точками и говорить, например, о точке $a+bi$. Комплексное число $a+bi$ можно изображать также в виде вектора с координатами $(a; b)$. При этом сумма и разность двух комплексных чисел изображается соответственно суммой и разностью соответствующих векторов.

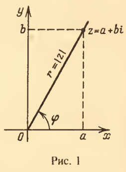


Рис. 1

Сопряженным с комплексным числом $z=a+bi$ называется число $\bar{z}=a-bi$. Комплексное число $-z=-a-bi$ называется *противоположным* числу $z=a+bi$.

Модулем числа $z=a+bi$ называется число $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, $|z|$ — расстояние от точки O до точки z (рис. 1).

89. Назовите комплексные числа, противоположные и сопряженные данным:

1) $3+i$; 2) $1-5i$; 3) $-2i$; 4) $4i$; 5) 0; 6) $-7+i$; 7) 5; 8) $-3-2i$.

90. Найдите произведение двух сопряженных комплексных чисел $a+bi$ и $a-bi$.

91. Разложите на множители:

1) a^2+b^2; 2) $a+b$, $a>0$; $b>0$; 3) $2+\sqrt{3}$;
4) $9a^2+16b^2$; 5) $36a^2+25b^2$.

92. Постройте на координатной плоскости точки z, $\bar{z}$, $-z$, если:

1) $z=3+i$; 2) $z=-1+2i$; 3) $z=2i$; 4) $z=3$;
5) $z=-3i$; 6) $z=-2i-3$; 7) $z=-4$; 8) $z=4-i$.

93. Какое комплексное число соответствует точке плоскости:

1) (0; 2); 2) (2; 3); 3) (−3; 0); 4) (5; −5);
5) (0; −2); 6) (−2; 4); 7) (3; 0); 8) (−1; −1)?

94. Постройте вектор, соответствующий комплексному числу:

1) $z=-3$; 2) $z=4$; 3) $z=2i$; 4) $z=-i$;
5) $z=2+3i$; 6) $z=-2+3i$; 7) $z=-1-i$; 8) $z=3-2i$.

95. Какое число соответствует точке, симметричной точке (−2; 3) относительно: 1) оси x; 2) оси y; 3) начала координат?

96. Изобразите на плоскости множество точек $z=x+yi$, если:

1) $x>0$; 2) $x<-2$; 3) $y>3$; 4) $y<1$;
5) $x=3$; 6) $y=0$; 7) $x=1$; $y=3$; 8) $1<x<3$;
9) $0\leqslant y\leqslant 4$; 10) $1<x<2$; $-1<y\leqslant 1$;
11) $x=1$; $-1\leqslant y\leqslant 2$.

97. Постройте сумму векторов, изображающих следующие комплексные числа:

1) $z_1=2-i$; $z_2=-3+2i$; 2) $z_1=6i$; $z_2=-5-2i$.

98. Какое число соответствует середине отрезка, концы которого расположены в точках $z_1=1$; $z_2=i$?

99*. Вершины четырехугольника $OABC$ находятся соответственно в точках 0, $1+i$, 3 и $2-i$. Пользуясь геометрической интерпретацией действий над комплексными числами, найдите точку пересечения диагоналей OB и AC четырехугольника.

100. Найдите модуль комплексного числа:

1) 3; 2) i; 3) $-5i$; 4) -2; 5) $1+i$; 6) $3-4i$;
7) $-\sqrt{3}+i$; 8) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; 9) $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

101. Постройте множество точек z, удовлетворяющих условиям:

1) $|z|=3$; 2) $|z|\leqslant 2$; 3) $|z|>4$;
4) $1\leqslant |z|\leqslant 2$.

102. При каких действительных значениях x числа $z_1=x+(3i-1)^2$ и $z_2=2x^2+6i+2i^2$ будут противоположными?

103. Решите уравнения:

1) $z^2+|z|^2=0$; 2) $|z|+(-iz)=1-2i$.

10. Вычитание и деление комплексных чисел. *Вычитание и деление комплексных чисел* являются действиями, обратными соответственно сложению и умножению. Отсюда получаются следующие правила вычитания и деления комплексных чисел:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i;$$
$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Последнюю формулу можно не запоминать: она получается умножением числителя и знаменателя дроби $\frac{a+bi}{c+di}$ на число, сопряженное со знаменателем. При этом знаменатель, равный произведению двух сопряженных комплексных чисел, станет действительным числом.

Модуль разности двух комплексных чисел z_1 и z_2 есть расстояние между точками z_1 и z_2.

Пример 1. Решите уравнение $(3-2i)z=3+i$.

□ $z=\frac{3+i}{3-2i}=\frac{(3+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{9+3i+6i+2i^2}{9+4}=$
$=\frac{7+9i}{13}=(7+9i)\cdot\frac{1}{13}=\frac{7}{13}+\frac{9}{13}i.$ ■

Пример 2. Построить множество точек z, удовлетворяющих условию $|z+2i|=1$.

Рис. 2

□ Число $z+2i$ можно представить в виде $z-(-2i)$. Так как $|z-(-2i)|=1$, то точки z находятся на расстоянии 1 от точки $-2i$, т. е. они лежат на окружности с центром в точке $-2i$ и радиусом 1 (рис. 2). ■

104. Выполните действия:

1) $(-7+i)-(-2-3i)$; 2) $(3{,}7-7{,}6i)-(2{,}1+0{,}9i)$;

3) $\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}i\right)-\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{4}i\right)$; 4) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{6}i)-(-\sqrt{2}-4\sqrt{6}i)$.

105. Решите уравнения:
1) $(2-i)+z=-3-2i$; 2) $(-3+2i)-z=7+3i$;
3) $(-5{,}6-4{,}2i)+z=-1{,}7+3{,}8i$; 4) $\left(-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}i\right)-z=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i$.

106. Выполните действия:
1) $\frac{1}{1-i}$; 2) $\frac{5}{1+2i}$; 3) $\frac{2+i}{2-i}$; 4) $\frac{3i}{1+i}$; 5) $\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$;
6) $\frac{4+3i}{3-4i}-\frac{5-4i}{4+5i}$; 7) $\frac{m\sqrt{n}-n\sqrt{m}i}{n\sqrt{m}+m\sqrt{n}i}$;
8) $\frac{1+i}{2-i}+\frac{2-i}{3+i}+2i$; 9) $\left(\frac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^2$.

107. Решите уравнения:
1) $z(-4+3i)=1+i$; 2) $z(1-i)=-5-2i$;
3) $z(3+4i)=1-4i$; 4) $z(-4-i)=-2+2i$.

108. Вычислите:
1) $\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^5}$; 2) $\frac{1}{i^{13}}+\frac{1}{i^{23}}+\frac{1}{i^{33}}$;
3*) $\frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96}-i(1+i)^{98}}$.

109. Докажите, что следующие числа действительны:
1) $z+\bar{z}$; 2) $\frac{1}{i}(z-\bar{z})$; 3) $\frac{z}{\bar{z}}-\frac{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}{2z\bar{z}}$.

110. Найдите расстояние между точками:
1) 0 и -4; 2) 5 и -2; 3) 3 и $4i$; 4) -7 и i;
5) $5i$ и $-3i$; 6) 0 и $1-i$; 7) $1+i$ и $2+3i$;
8) $3-2i$ и $1+4i$.

111. Постройте множество точек z, удовлетворяющих условиям:
1) $|z-1|=1$; 2) $|z-2+i|=2$; 3) $|z-2|<3$;
4) $|z-i|>2$; 5) $|z-1+2i|<4$; 6) $|z+2-i|>1$;
7) $|z-1|=|z-i|$; 8) $\lg|z+2i|<1$.

112. На плоскости дана окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 5. При каком условии точка, изображающая комплексное число z, будет лежать: 1) внутри круга; 2) на окружности; 3) вне круга?

113. Постройте разность векторов, изображающих комплексные числа:
1) $z_1=1+i$; $z_2=-2+3i$; 2) $z_1=-3i$; $z_2=5+2i$.

114. На плоскости даны две точки: $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$. Где находится точка $\frac{z_1+z_2}{2}$?

115. Укажите на плоскости точки z, для которых:
1) $\bar{z}=\frac{1}{z}$; 2) $z=1+i-\bar{z}$; 3) $\bar{z}=-\frac{1}{z}$.

11. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом. Корни любого квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ с действительными коэффициентами и дискриминантом $D=b^2-4ac$ находятся по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},$$

где $\sqrt{D}=i\sqrt{|D|}$, если $D<0$.

Пример. Решить уравнение $x^2-2x+4=0$.

□ Дискриминант уравнения $D=4-4\cdot1\cdot4=-12<0$. Поэтому $x=1+i\sqrt{3}$ или $x=1-i\sqrt{3}$. ■

116. Решите уравнения:
1) $x^2=-16$; 2) $x^2=-2$; 3) $3x^2=-5$;
4) $x^2+0{,}09=0$.

117. Решите уравнения:
1) $x^2-2x+5=0$; 2) $3x^2+4x+3=0$;
3) $x^2-8x+20=0$; 4) $5x^2-4x+8=0$.

118. Решите систему уравнений:
1) $\begin{cases}x+y=6,\\ xy=45;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+3y=1,\\ xy=1;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ x-y=3.\end{cases}$

119. Докажите, что корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом являются сопряженными.

120. Докажите, что теорема Виета справедлива для квадратных уравнений с отрицательными дискриминантами.

121. Составьте квадратное уравнение по его корням:
1) $x_1=3+2i$; $x_2=3-2i$; 2) $x_1=-1+4i$; $x_2=-1-4i$.

122. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее данный коренъ:
1) $2-i$; 2) $-1+0{,}5i$; 3) $\sqrt{5}-i\sqrt{2}$;
4) $0{,}5-1{,}5i$.

123. Решите уравнения:
1) $x^3=8$; 2) $x^3=-27$; 3) $x^4=16$; 4) $x^4=81$.

124*. Извлечение квадратного корня из комплексного числа $z=a+bi$ можно выполнить решением уравнения $(x+yi)^2=a+bi$. Найдите квадратные корни из следующих комплексных чисел z:
1) $z=i$; 2) $z=3+4i$.

§ 4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

12. Аргумент комплексного числа. *Аргументом* комплексного числа $z \neq 0$ называется угол между положительным направлением оси x и лучом Oz (см. рис. 1). Аргумент обозначается φ или $\operatorname{Arg} z$. Аргумент комплексного числа $z=a+bi$ находится из соотношений $\cos\varphi = a/|z|$; $\sin\varphi = b/|z|$. Для комплексного числа $z \neq 0$ он определен неоднозначно. Если φ — аргумент числа z, то $\varphi + 2k\pi$ при любом целом k также является аргументом этого числа. Аргумент нуля не определен. То значение аргумента, которое заключено в промежутке $(-\pi; \pi]$, будем называть *главным значением аргумента.*

Пример. Найти модуль и аргумент числа $z=-3+i$.

□ Модуль числа z равен $r=|z|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$. Аргумент числа $z=a+bi \neq 0$ можно находить следующим образом: выяснить, в какой четверти находится точка z; найти в этой четверти угол φ, решив одно из уравнений $\cos\varphi = a/r$ или $\sin\varphi = b/r$ или, если $a \neq 0$, уравнение $\operatorname{tg}\varphi = b/a$. В нашем случае $a=-3$, $b=1$, $\operatorname{tg}\varphi = -1/3$. Так как точка z лежит во второй четверти и $\operatorname{tg}\varphi = -1/3$, то $\varphi = 180^\circ - \operatorname{arctg}\frac{1}{3} \approx 180^\circ - 18^\circ 26' = 161^\circ 34'$.

Итак, главное значение аргумента числа z

$$\varphi \approx 161^\circ 34'.$$

Все значения аргумента z имеют вид

$$\operatorname{Arg} z \approx 161^\circ 34' + 360^\circ \cdot k, \quad k \in Z. \ ■$$

Любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r=|z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Эта форма записи комплексного числа называется *тригонометрической.*

125. Найдите все значения аргумента комплексного числа:

1) 3; 2) i; 3) -5; 4) -2; 5) $1+i$; 6) $3-4i$;

7) $-\sqrt{3}+i$; 8) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; 9) $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

126. По данным модулю и аргументу комплексного числа постройте соответствующий ему вектор:

1) 1; 180°; 2) 2; 45°; 3) 3; 90°; 4) 1/3; −90°;
5) 1,5; 60°; 6) 3/4; 150°; 7) 5; −135°.

127. Найдите главное значение φ аргумента комплексного числа, если:

1) $\sin\varphi = -0{,}5$; 2) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$; 4) $\sin\varphi = 0{,}7$.

128. На оси x дан единичный вектор, отложенный от начала координат. Над ним выполнили следующие операции:

1) растяжение в 3 раза и поворот на угол 180°;
2) растяжение в 2 раза и поворот на 90°;
3) растяжение в 4 раза и поворот на 30°.

Постройте полученные векторы и укажите соответствующие им комплексные числа.

129. Постройте множество точек z, удовлетворяющих условиям:

1) $\operatorname{Arg} z = \frac{3\pi}{4}$; 2) $|z| = 1$; $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4}$;

3) $2 < |z| \leqslant 4$, $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{6} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2}$;

5) $|z| = 2$; $0 < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{4}$; 6) $|z| \leqslant 1$; $\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg} z < \frac{3\pi}{4}$.

130. Каким условиям удовлетворяют комплексные числа z, изображенные на: 1) рис. 3; 2) рис. 4; 3) рис. 5?

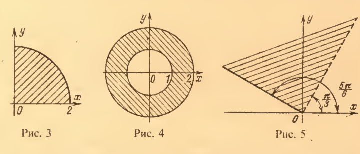


Рис. 3 Рис. 4 Рис. 5

131. Представьте в алгебраической форме комплексное число:

1) $z = 3(\cos 0 + i\sin 0)$; 2) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

4) $z=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$;

5) $z=\cos\pi+i\sin\pi$;

6) $z=\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$;

7) $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

8) $z=6\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$;

9) $z=\cos 24^\circ+i\sin 24^\circ$;

10) $z=5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

132. Представьте в тригонометрической форме числа:

1) 2; 2) -3; 3) $6i$; 4) $-4i$; 5) $-1+i$;
6) $\sqrt{3}-i$; 7) $-2-2i$; 8) $-3+4i$;
9) $-5+i$; 10) $7{,}2+5{,}1i$; 11) $-0{,}7+1{,}2i$;
12) $1+i\,\mathrm{tg}\,1$; 13) $2(\cos 20^\circ-i\sin 20^\circ)$;
14) $\sin\varphi+i\cos\varphi$;
15) $-5(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)$;
16)* $1+\cos\alpha+i\sin\alpha,\ 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$.

133. Постройте точки, изображающие комплексные числа с модулем, равным 1, аргументы которых:

1) 120°; 240°; 360°; 2) 30°; 120°; 210°; 300°.

Покажите, что сумма этих чисел равна нулю.

13. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме. С помощью тригонометрической формы удобно выполнять умножение, деление, возведение в степень комплексных чисел. Пусть

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Тогда:

1. $z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

Эта формула справедлива для произведения любого конечного числа сомножителей. В частности, имеет место формула Муавра:

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),\qquad n\in N.$$

2. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

134. Выполните действия:

1) $2(\cos 130^\circ+i\sin 130^\circ)\cdot 4(\cos 140^\circ+i\sin 140^\circ)$;

2) $3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

3) $\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$;

4) $5(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)(\cos 80^\circ+i\sin 80^\circ)\times$
$\times 4(\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ)$;

5) $(\cos 3+i\sin 3)(\cos 2+i\sin 2)$;

6) $6(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ):(2(\cos(-50^\circ)+i\sin(-50^\circ)))$;

7) $4\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right):\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

8) $3\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right):$
$:\left(\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)$.

135. Выполните действия:

1) $\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}$; 2) $\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta-i\sin\beta}$;

3) $\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$;

4) $(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi+i\sin\varphi)$;

5) $\frac{-\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta-i\sin\beta}$; 6) $\frac{-\cos 60^\circ-i\sin 60^\circ}{-\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ}$.

136. Дан вектор, изображающий комплексное число z. Его растянули в t раз и повернули на угол φ. Найдите комплексное число, соответствующее новому вектору, если:

1) $z=1+i$; $t=\sqrt{2}$; $\varphi=\frac{\pi}{4}$;

2) $z=2+3i$; $t=2$; $\varphi=-\frac{\pi}{2}$;

3) $z=-2+i$; $t=3$; $\varphi=\pi$.

137. Вычислите:

1) $\left(6\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right)\right)^4$; 2) $(2(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ))^{12}$;

3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{100}$; 4) $(\sqrt{3}+i)^{50}$; 5) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8}$;

6) $(-2-3i)^5$; 7) $\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right)^{10}$; 8) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$;

9) $\frac{1}{(\cos 9+i\sin 9)^5}$; 10) $(1+i\sqrt{3})^3(1-i)^7$.

138*. Применяя формулу Муавра, докажите справедливость следующих тождеств:

1) $\cos 2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi$, $\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi$;

2) $\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$, $\sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi$.

139. Докажите, что последовательность чисел (z_n), где

$$z_n=\cos nx+i\sin nx,$$

есть геометрическая прогрессия. Найдите ее знаменатель.

140. Дана точка z. Постройте на той же плоскости точки:

1) $-iz$; 2) i^5z; 3) $-\frac{z}{i}$; 4) $z(-1+i)$;

5) $\frac{z}{-\sqrt{3}-i}$; 6) $z(2+2i\sqrt{3})$.

14. Показательная форма комплексного числа. Обозначим $\cos\varphi+i\sin\varphi$ через $e^{i\varphi}$. Запись комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ в виде

$$z=re^{i\varphi}$$

называется *показательной формой комплексного числа.* Пусть $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$. Тогда

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$$

$$z_1^n=r_1^ne^{in\varphi_1},\quad n\in Z.$$

141. Представьте в алгебраической и тригонометрической формах числа:

1) $3e^{i\frac{2\pi}{3}}$; 2) $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$; 3) e^i; 4) $e^{0\cdot i}$; 5) $2e^{i\frac{\pi}{2}}$;

6) $5e^{-i\frac{\pi}{2}}$; 7) $\sqrt{2}e^{i\pi}$; 8) $3e^{i\cdot 2\pi}$; 9) $6e^{1,5i}$;

10) $14e^{-i\frac{17\pi}{90}}$.

142. Представьте в показательной форме числа, заданные в упражнении 131.

143. Представьте в показательной форме числа, заданные в упражнении 132.

144. Выполните действия. Результат запишите в показательной, тригонометрической и алгебраической формах:

1) $2e^{i\frac{7\pi}{18}}\cdot 3e^{i\frac{11\pi}{18}}$; 2) $e^{i\frac{\pi}{6}}\cdot 4e^{i\frac{\pi}{12}}$; 3) $6e^{i}:(3e^{-i})$;

4) $4e^{i\frac{5\pi}{9}}:(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{9}})$; 5) $(\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{9}})^3$; 6) $(2e^{i\frac{7\pi}{9}})^{10}$.

145. Представив числа $z_1=-1+i\sqrt{3}$ и $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ в показательной форме, вычислите:

1) $z_1\cdot z_2$; 2) $\frac{z_1}{z_2}$; 3) $\frac{z_2}{z_1}$; 4) z_1^6; 5) z_2^4; 6) z_1^{-3}.

146. Выполните действия, используя показательную форму комплексного числа:

1) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}$; 2) $\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

147. Найдите сумму гармонических колебаний:

1) $y=4\cos\left(5t-\frac{\pi}{7}\right)$ и $y=5\cos\left(5t+\frac{3\pi}{14}\right)$;

2) $y=3\sin\left(2t+\frac{3\pi}{8}\right)$ и $y=7\sin\left(2t-\frac{7\pi}{8}\right)$.

148. По двум ветвям, соединенным параллельно, в цепи переменного тока проходят токи $I_1=25\cos(50t+0{,}92)$ и $I_2=65\cos(50t-1{,}18)$. Найдите силу тока в цепи, полученной объединением этих ветвей в одну цепь.

Указание. При объединении ветвей в одну цепь по ней будет проходить ток $I=I_1+I_2$.

149. Имеются четыре генератора, соединенные последовательно. Они дают соответственно напряжения:

$$U_1=2\cos\left(10t+\frac{\pi}{5}\right);\quad U_2=7\cos\left(10t+\frac{3\pi}{10}\right);$$

$$U_3=9\cos\left(10t+\frac{7\pi}{10}\right);\quad U_4=12\cos\left(10t+\frac{13\pi}{10}\right).$$

Найдите напряжение на зажимах цепи, т. е. суммарное напряжение.

Глава 3
МЕТОД КООРДИНАТ

§ 5. Векторы и координаты

15. Векторы на плоскости и в пространстве. Векторные величины изображают с помощью направленных отрезков. Для изображения некоторых векторных величин (скорость поступательного движения твердого тела и др.) выбор начала направленного отрезка не существен. Направленные отрезки, имеющие равные длины и одинаковые направления, называют *равными*. Совокупность всех направленных отрезков, равных данному, определяет *свободный вектор* или просто *вектор*. Векторы обозначают $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$, ... или $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{AB}$, ...

Все направленные отрезки, изображающие вектор $\overline{a}$, имеют одну и ту же длину и одно и то же направление, которое называют соответственно *длиной* (*модулем*, *абсолютным значением*) и *направлением* вектора $\overline{a}$. Длина вектора $\overline{a}$ обозначается $|\overline{a}|$ или a.

Пары совпадающих точек определяют вектор, который называется *нулевым вектором* и обозначается 0 или $\mathbf{0}$. Модуль нулевого вектора считается равным нулю. Понятие направления для нулевого вектора не определено.

Для любого ненулевого вектора $\overline{a}$ через $-\overline{a}$ обозначают вектор, *противоположный* данному (он имеет такую же длину, как и вектор $\overline{a}$, но противоположное направление). Векторы, имеющие одинаковые или противоположные направления, называются *коллинеарными*. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору $\overline{a}$.

Построение направленного отрезка с началом в данной точке M, изображающего данный вектор $\overline{a}$, называют *откладыванием* вектора $\overline{a}$ от точки M.

150. Подсчитайте, сколько различных векторов изображено на рис. 6 и 7.

151. Подсчитайте число ненулевых различных векторов, определяемых вершинами: 1) треугольника;

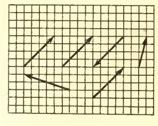



Рис. 6

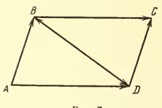


Рис. 7

2) параллелограмма; 3) тетраэдра; 4)* параллелепипеда; 5)* правильного пятиугольника; 6)* правильного шестиугольника; 7)* правильного n-угольника.

152. Докажите, что если точки A, B, C, D не лежат на одной прямой и ненулевые векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ равны, то эти точки являются вершинами параллелограмма.

153. Точки A, B, C, D — вершины параллелограмма, O — точка пересечения его диагоналей, а M — середина стороны AB. Укажите пары точек, определяющие: 1) один и тот же вектор; 2) векторы, одинаково направленные с $\overline{AC}$; 3) противоположные векторы; 4) векторы, направленные противоположно $\overline{AD}$; 5) векторы, коллинеарные $\overline{OM}$.

154. Данный вектор отложен от всех точек: 1) прямой; 2) отрезка; 3) плоскости; 4) треугольника; 5) круга; 6) шара; 7) тетраэдра. Какую фигуру образуют концы полученных направленных отрезков?

16. Действия над векторами. Пусть даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Тогда сумму векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ геометрически можно найти по *правилу треугольника* или *параллелограмма.* Так как $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})$, то построение разности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сводится к применению указанных правил сложения. Сумму трех или большего числа векторов на плоскости находят по *правилу многоугольника.* Сумму трех ненулевых векторов пространства, параллельных одной плоскости, находят по *правилу параллелепипеда.*

Свойства сложения векторов: 1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$; 2) $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$; 3) $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$.

Произведением ненулевого вектора $\overline{a}$ на число $x\neq0$ является вектор $x\overline{a}$, модуль которого равен $|x||\overline{a}|$,

а направление совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $x>0$, и противоположно направлению вектора $\bar{a}$, если $x<0$. Если $\bar{a}=\bar{0}$ или $x=0$, то $x\bar{a}=\bar{0}$.

Вектор $\bar{a}$ коллинеарен ненулевому вектору $\bar{b}$ тогда и только тогда, когда существует такое число x, что $\bar{a}=x\bar{b}$.

Свойства умножения вектора на число:

1) $x(y\bar{a})=(xy)\bar{a}$;

2) $x(\bar{a}+\bar{b})=x\bar{a}+x\bar{b}$;

3) $(x+y)\bar{a}=x\bar{a}+y\bar{a}$.

Скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{b}$ *ненулевых векторов* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно произведению их длин на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами.

Если $\bar{a}=\bar{0}$ или $\bar{b}=\bar{0}$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.

Ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Скалярное произведение вектора $\bar{a}$ на себя называют *скалярным квадратом* вектора и обозначают $\bar{a}^2$:

$$\bar{a}^2=|\bar{a}|^2.$$

Свойства скалярного произведения векторов:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$; 2) $(x\bar{a})\cdot\bar{b}=x(\bar{a}\cdot\bar{b})$;

3) $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$.

Вектор называется *единичным*, если его длина равна единице.

155. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M лежит на стороне CD, O — точка пересечения диагоналей. Найдите:

1) $\overline{AB}+\overline{AD}$; 2) $(-\overline{AM})+\overline{DM}$; 3) $\overline{AB}+\overline{CD}$;

4) $\overline{DA}+\overline{BM}$; 5) $\overline{AB}-\overline{AO}$; 6) $\overline{DO}-\overline{CB}$;

7) $\overline{CO}-\overline{OB}$; 8) $-\overline{DA}-\overline{AB}$; 9) $\overline{AO}-\overline{MC}$.

156. Докажите, что если в четырехугольнике $ABCD$ диагонали, пересекаясь, делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

157. На материальную точку действуют две силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, направленные под углом α друг к другу. Найдите модуль равнодействующей, если: 1) $|\bar{F}_1|=3$Н,

$|\bar{F}_2|=4$Н, $\alpha=90°$; 2) $|\bar{F}_1|=3$Н, $|\bar{F}_2|=7$Н, $\alpha=30°$; 3) $|\bar{F}_1|=11{,}7$Н, $|\bar{F}_2|=20{,}5$Н, $\alpha=35°$.

158. Под каким углом друг к другу направлены две приложенные в одной точке силы, модули которых равны 5Н и 16Н, если модуль их равнодействующей равен: 1) 19Н; 2) 13Н?

159. Электрический диполь представляет собой два заряда $+Q$ и $-Q$, расположенные на расстоянии l друг от друга. Найдите модуль силы, действующий на положительный заряд q, расположенный на одинаковом расстоянии r от данных зарядов, если:

1) $Q=10^{-8}$ Кл, $q=1$ Кл, $l=10$ см, $r=10$ см;

2) $Q=3{,}6\cdot10^{-7}$ Кл, $q=1$ Кл, $l=10$ см, $r=100$ м.

160. Две материальные точки начинают равномерное движение из одной точки под углом α друг к другу со скоростями v_1 и v_2. С какой скоростью они удаляются друг от друга, если:

1) $v_1=50$ км/ч, $v_2=10$ км/ч, $\alpha=90°$;

2) $v_1=2$ м/с, $v_2=4$ м/с, $\alpha=60°$;

3) $v_1=12$ км/ч, $v_2=6$ км/ч, $\alpha=37°$;

4) $v_1=12{,}5$ км/ч, $v_2=6{,}2$ км/ч, $\alpha=38°$?

161. Постройте равнодействующую сил $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, изображенных на: 1) рис. 8; 2) рис. 9; 3) рис. 10; 4) рис. 11; 5) рис. 12.

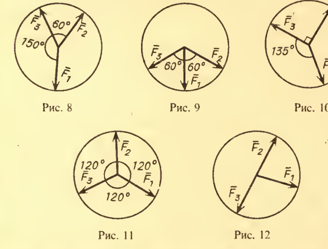


Рис. 8 Рис. 9 Рис. 10

Рис. 11 Рис. 12

162. Отложите от данной точки A четыре таких различных вектора, чтобы их сумма была равна $\bar{0}$.

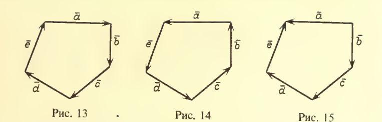


Рис. 13 Рис. 14 Рис. 15

163. Выразите вектор $\bar{a}$ через остальные векторы на: 1) рис. 13; 2) рис. 14; 3) рис. 15.

164. В вершинах квадрата со стороной 10 см расположены четыре заряда по 10^{-6} Кл. Найдите модуль и направление напряженности электрического поля $\bar{E}$, создаваемого этими зарядами в центре квадрата, если знаки зарядов по контуру квадрата чередуются так: 1) $++++$; 2) $+-+-$; 3) $++--$; 4) $+++-$.

165. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Найдите: 1) $\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$; 2) $\overline{AD}+\overline{DC}+\overline{CB}$; 3) $\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{DC}+\overline{DA}$.

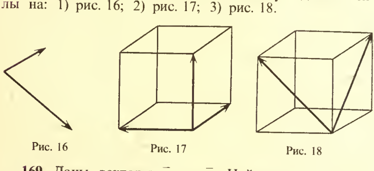
166. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите: 1) $\overline{BC}+\overline{CC_1}+\overline{C_1B_1}$; 2) $\overline{CB}+\overline{B_1A_1}+\overline{AD_1}+\overline{D_1C_1}$; 3) $\overline{AC_1}+\overline{D_1A_1}-\overline{DB}+\overline{D_1D}$; 4) $\overline{D_1C}+\overline{AA_1}-\overline{BC}-\overline{CC_1}$.

167. Найдите модуль равнодействующей трех взаимно перпендикулярных сил $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, приложенных к одной точке, если:

1) $|\bar{F}_1|=2\text{Н}$, $|\bar{F}_2|=3\text{Н}$, $|\bar{F}_3|=6\text{Н}$;

2) $|\bar{F}_1|=3\text{Н}$, $|\bar{F}_2|=6\text{Н}$, $|\bar{F}_3|=12\text{Н}$.

168. Найдите силу, уравновешивающую данные силы на: 1) рис. 16; 2) рис. 17; 3) рис. 18.


Рис. 16 Рис. 17 Рис. 18

169. Даны векторы $\bar{a}$ и $x\bar{a}$. Найдите значения x, при которых эти векторы: 1) равны; 2) противополож-

ны; 3) противоположно направлены; 4) одинаково направлены; 5) коллинеарны.

170. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите x, если:

1) $\overline{AB}=x\overline{CD}$; 2) $\overline{AC}=x\overline{OA}$;

3) $\overline{OC}=x\overline{CA}$; 4) $\overline{DB}=x\overline{OB}$.

171. Выразите через $\overline{F}_1$ равнодействующую сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, изображенных на: 1) рис. 9; 2) рис. 10; 3) рис. 8.

172. Найдите угол между ненулевыми векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, если: 1) $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ противоположно направлены; 2) $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ одинаково направлены; 3) точки A, B, C — вершины прямоугольного треугольника, в котором катет BC равен половине гипотенузы AB.

173. Изобразите на плоскости два ненулевых вектора, скалярное произведение которых: 1) равно 0; 2) положительно; 3) отрицательно.

174. Дан правильный треугольник ABC со стороной 2. Точки M и N — середины сторон AB и BC. Найдите скалярные произведения векторов:

1) $\overline{AC}$ и $\overline{MN}$; 2) $\overline{AB}$ и $\overline{MA}$; 3) $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$; 4) $\overline{AM}$ и $\overline{NC}$; 5) $\overline{AN}$ и $\overline{CN}$; 6) $\overline{AN}$ и $\overline{CM}$.

175. Докажите равенство $(\overline{a}+\overline{b})^2+(\overline{a}-\overline{b})^2=2(\overline{a}^2+\overline{b}^2)$, выясните его геометрический смысл.

176. Найдите длину суммы векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если: 1) $|\overline{a}|=11$, $|\overline{b}|=23$, $|\overline{a}-\overline{b}|=30$; 2) $|\overline{a}|=10$, $|\overline{b}|=15$, $|\overline{a}-\overline{b}|=25$.

177. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол 120°. Зная, что $|\overline{a}|=5$, $|\overline{b}|=4$, вычислите:

1) $(\overline{a}-2\overline{b})\cdot(\overline{a}+2\overline{b})$; 2) $(2\overline{a}+\overline{b})^2$; 3) $|2\overline{a}-\overline{b}|$;

4) $|\overline{a}+2\overline{b}|$; 5) $|\overline{b}-3\overline{a}|$; 6) $(2\overline{a}-\overline{b})\cdot(\overline{a}+2\overline{b})$.

178. Вычислите угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=2\overline{m}+\overline{n}$ и $\overline{b}=\overline{m}-2\overline{n}$, если векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$ единичны и угол между ними равен 60°.

179. Докажите, что длины векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равны, если векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$ перпендикулярны.

180. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длины всех ребер равны единице, а угол BAD равен 60°. Вычислите: 1) длину диагонали DB_1 и угол между диагоналями DB_1 и AD_1; 2) длину диагонали AC_1 и угол между диагоналями AC_1 и DB_1.

17. Разложение вектора на составляющие. Вектор $\overline{m}$ плоскости можно единственным образом разложить на составляющие, параллельные двум заданным пересекающимся прямым a и b, т. е. представить вектор $\overline{m}$ в виде суммы двух векторов $\overline{m}_a$ и $\overline{m}_b$, параллельных этим прямым:

$$\overline{m}=\overline{m}_a+\overline{m}_b.$$

Вектор $\overline{m}$ пространства можно единственным образом представить в виде суммы трех векторов $\overline{m}_a$, $\overline{m}_b$, $\overline{m}_c$, параллельных трем прямым a, b, c, если эти прямые не параллельны какой-то одной плоскости:

$$\overline{m}=\overline{m}_a+\overline{m}_b+\overline{m}_c.$$

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ плоскости неколлинеарны, то любой вектор $\overline{m}$ плоскости можно представить единственным образом в виде

$$\overline{m}=x\overline{a}+y\overline{b},$$

где x, y — действительные числа.

Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ пространства *некомпланарны*, т. е. не параллельны одной и той же плоскости, то любой вектор $\overline{m}$ пространства можно представить единственным образом в виде

$$\overline{m}=x\overline{a}+y\overline{b}+z\overline{c},$$

где x, y, z — действительные числа.

181. Дан вектор $\overline{a}$ на плоскости. Представьте его в виде суммы двух векторов, если известны: 1) направления слагаемых; 2) направление и длина одного из слагаемых; 3) направление одного и длина другого слагаемого; 4) длины обоих слагаемых.

182. Величина равнодействующей двух взаимно перпендикулярных сил равна 10Н. Найдите модуль одной составляющей, если:

1) модуль другой равен 8Н;

2) эта составляющая образует с равнодействующей угол 30°.

183. Найдите углы, которые образуют составляющие силы с направлением действия силы, если их модули равны 6Н и 9Н, а модуль данной силы 13Н.

184. Груз массой m подвешен на шнуре и оттянут горизонтальной оттяжкой. Найдите модули сил натяже-

ния шнура и оттяжки, если угол между шнуром и оттяжкой равен α и:

1) $m=1$ кг, $\alpha=120^\circ$;

2) $m=0,6$ кг; $\alpha=150^\circ$.

185. Между двумя стенами висит на веревках фонарь массой m. Левая веревка образует со стеной угол α, а правая — угол β. Найдите натяжение обеих веревок, если:

1) $m=2$ кг, $\alpha=45^\circ$, $\beta=30^\circ$;

2) $m=2$ кг, $\alpha=46^\circ$, $\beta=29^\circ$.

186. От пристани к противоположному берегу реки отправляется лодка с собственной скоростью $\bar{v}$. Скорость течения реки 5 км/ч. В каком направлении следует править, чтобы лодка двигалась поперек реки, и какой будет скорость лодки относительно берега, если: 1) $|\bar{v}|=10$ км/ч; 2) $|\bar{v}|=6$ км/ч?

187. Дан параллелограмм $ABCD$, O — точка пересечения диагоналей, P — середина стороны BC. Выразите:

1) векторы $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{AO}$ и $\overline{DO}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$;

2) векторы $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{OP}$ и $\overline{PC}$ через векторы $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$;

188. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, M — середина ребра DD_1, N — середина CC_1, P — середина BC_1. Выразите через векторы $\bar{a}=\overline{AB}$, $\bar{b}=\overline{AD}$, $\bar{c}=\overline{AA_1}$ следующие векторы:

1) $\overline{AB_1}$; 2) $\overline{AC_1}$; 3) $\overline{AM}$; 4) $\overline{AN}$;

5) $\overline{AP}$; 6) $\overline{PN}$; 7) $\overline{MN}$.

18. Прямоугольные координаты. Пусть на плоскости (в пространстве) задана прямоугольная система координат xy (xyz). Тогда координаты проекций точки M на оси координат, взятые в определенном порядке, называют *прямоугольными координатами точки* M и обозначают $(x; y)$ $((x; y; z))$.

189. Найдите координаты точек, симметричных точке M относительно осей и начала координат, если:

1) $M(1; -2)$; 2) $M(-3; 0)$; 3) $M(1; 2; -4)$.

190. Найдите координаты проекций точки A на координатные оси, если:

1) $A(2; -1)$; 2) $A(-1; 3; 0)$; 3) $A(-3; -2; 3)$.

191. Выпишите координаты вершин: 1) квадрата со стороной a, если диагонали квадрата совпадают с осями

координат; 2) правильного шестиугольника со стороной a, если одна из диагоналей совпадает с осью x, а центр лежит в начале координат.

192. Выпишите координаты вершин: 1) куба с ребром a, если одна из вершин основания лежит в начале координат, а ребра трехгранного угла в этой вершине совпадают с осями координат; 2)* правильной треугольной пирамиды с высотой h, если вершина находится в начале координат, а вершины оснований — на координатных осях.

193. На плоскости даны точки A и B. Постройте систему координат, в которой точки A и B будут иметь координаты $(1; 2)$ и $(-1; 2)$.

194. Выберите прямоугольную систему координат на плоскости и найдите в ней координаты вершин многоугольника, изображенного на: 1) рис. 19; 2) рис. 20.

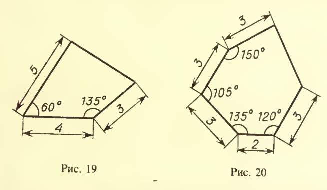


Рис. 19 Рис. 20

19. Координаты векторов. Через $\bar{i}, \bar{j}$ $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ обозначают единичные векторы, направления которых совпадают с направлениями соответственно оси x, оси y (оси x, оси y, оси z), и называют *ортами*. Координаты вектора $\bar{a}$ в прямоугольной системе координат на плоскости (в пространстве) обозначают $\bar{a}=(x, y)$ $(\bar{a}=(x, y, z))$ или $\bar{a}(x; y)$ $(\bar{a}(x, y; z))$. *Координаты вектора* $\bar{a}$ являются коэффициентами в его разложении по ортам:

$$\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j} \quad (\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}).$$

Если заданы точки $A(x_1; y_1)$ $(A(x_1; y_1; z_1))$ и $B(x_2; y_2)$ $(B(x_2; y_2; z_2))$, то координаты вектора $\overline{AB}$ вычисляются по формуле

$$\overline{AB}=(x_2-x_1; y_2-y_1) \quad (\overline{AB}=(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)).$$

Действия над векторами на плоскости и в пространстве, которые заданы своими координатами, выполняются по следующим правилам.

1. Координаты суммы (разности) двух векторов равны сумме (разности) соответствующих координат этих векторов.

2. Координаты произведения вектора на число равны произведению соответствующих координат данного вектора на это число.

3. Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов. В частности, скалярный квадрат вектора равен сумме квадратов его координат.

Координаты векторов называют также *скалярными проекциями* или для краткости *проекциями вектора* на оси координат и обозначают $\text{пр}_x\bar{a}$, $\text{пр}_y\bar{a}$, $\text{пр}_z\bar{a}$.

Если угол между вектором $\bar{a}$ и осью x равен α, то

$$x=\text{пр}_x\bar{a}=|\bar{a}|\cos\alpha, \quad y=\text{пр}_y\bar{a}=|\bar{a}|\sin\alpha.$$

В пространстве имеют место аналогичные формулы

$$x=|\bar{a}|\cos\alpha, \quad y=|\bar{a}|\cos\beta, \quad z=|\bar{a}|\cos\gamma,$$

где α, β, γ — углы, образованные вектором $\bar{a}$ соответственно с осями x, y, z.

195. Даны точки $O(0; 0)$, $A(-1; 2)$, $B(4; 5)$, $C(-1; -3)$; $D(2; 6)$. Найдите координаты векторов:

1) $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BD}$; 2) $\overline{OB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$; 3) $\overline{CO}$, $\overline{DA}$, $\overline{CD}$.

196. Дан вектор $\overline{AB}=(-1; -2)$. Найдите координаты точки B, если известны координаты точки A:

1) $(1; 3)$; 2) $(-1; 2)$; 3) $(-4; -1)$; 4) $(0; 1)$.

197. Даны векторы $\bar{a}=(2; 3; 0)$, $\bar{b}=(-1; 2; 2)$ и $\bar{c}=(3; 1; 0)$. Найдите координаты вектора:

1) $\bar{a}+\bar{b}$; 2) $\bar{a}+\bar{c}$; 3) $3\bar{a}$; 4) $3\bar{a}-\bar{c}$; 5) $-3\bar{a}+\bar{c}$;

6) $(\bar{a}+2\bar{c})-(4\bar{a}+\bar{c})$; 7) $(4\bar{a}-4\bar{b})+(2\bar{c}-\bar{a})+(\bar{b}-3\bar{c})$.

199. Найдите равнодействующую сил $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, приложенных к одной точке, если известны проекции сил на координатные оси:

1) $\bar{F}_1=(2; -5)$, $\bar{F}_2=(-5; -1)$, $\bar{F}_3=(3; 6)$;

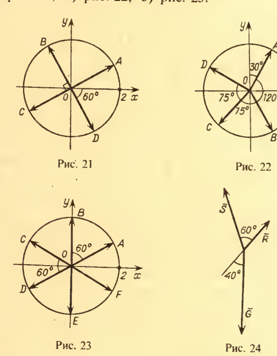
2) $\bar{F}_1=(2; 3; -4)$, $\bar{F}_2=(-5; 2; 1)$, $\bar{F}_3=(3; -4; 2)$.

200. Дан вектор $\bar{a}=(-3; 4; 0)$. Найдите вектор: 1) противоположный данному; 2) единичный, одинаково направленный с данным; 3) единичный, противоположно направленный данному.

201. Вычислите скалярное произведение векторов:
1) $\bar{a}=(-2; 3)$ и $\bar{b}=(3; 4)$; 2) $\bar{a}=4\bar{i}+\bar{j}$ и $\bar{b}=\bar{i}-\bar{j}$;
3) $\bar{a}=(4; -2; 0)$ и $\bar{b}=(1; 2; -\sqrt{3})$;
4) $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{k}$ и $\bar{b}=2\bar{j}$;
5) $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, где $A(-2; 4)$, $B(3; -6)$, $C(5; -3)$;
6) $\overline{MN}$ и $\overline{MQ}$, где $M(1; 3; 4)$, $N(-1; -2; 1)$, $Q(-2; 3; 0)$.

202. Найдите проекции на оси координат вектора на плоскости, длина которого равна $\sqrt{2}$, а угол, образованный данным вектором с осью x, составляет:
1) 45°; 2) 135°; 3) 225°; 4) 315°.

203. Найдите координаты векторов, изображенных на: 1) рис. 21; 2) рис. 22; 3) рис. 23.



204. Найдите координаты единичного вектора $\bar{a}$ пространства, если он образует с осями x, y, z соответственно углы α, β, γ. Докажите равенство

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

205. Вектор $\bar{a}$ пространства составляет с осью x угол α, а с осью y угол β. Какой угол он составляет с осью z, если: 1) $\alpha=60^\circ$, $\beta=45^\circ$; 2) $\alpha=30^\circ$, $\beta=120^\circ$?

206. Материальная точка покоится под действием плоских сил $\bar{R}$, $\bar{S}$ и $\bar{G}$ на рис. 24.

1) Выберите систему координат и найдите углы, которые образуют данные векторы с осями координат.

2) Найдите модули сил $\bar{R}$ и $\bar{S}$, если модуль $\bar{G}$ равен 30Н.

20. Основные формулы метода координат. Длина вектора $\bar{a}=(x;\ y;\ z)$, расстояние d между двумя точками $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ вычисляются соответственно по формулам

$$|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Для вычисления угла φ между двумя ненулевыми векторами $\bar{a}_1=(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\bar{a}_2=(x_2;\ y_2;\ z_2)$ используют формулу

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

Векторы $\bar{a}_1=(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\bar{a}_2=(x_2;\ y_2;\ z_2)$ коллинеарны, если существует такое число λ, что

$$x_1=\lambda x_2,\quad y_1=\lambda y_2,\quad z_1=\lambda z_2.$$

Соответствующие формулы на координатной плоскости получаются из указанных выше формул, если координаты z (аппликаты) положить равными нулю.

Координаты x_M, y_M точки M, делящей отрезок AB на плоскости, считая от точки A, в отношении $\lambda=AM/BM$, вычисляются по формулам

$$x_M=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\quad y_M=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda},$$

где $(x_A;\ y_A)$ — координаты точки A, а $(x_B;\ y_B)$ — координаты точки B.

Если $\lambda = m/n$, то формулы можно записать в виде

$$x_M = \frac{nx_A + mx_B}{m+n}, \quad y_M = \frac{ny_A + my_B}{m+n}.$$

Аналогичные формулы имеют место для координат x_M, y_M и z_M точки M, делящей отрезок AB пространства в отношении $\lambda > 0$.

В механике доказывается, что точка M, определяемая этими равенствами, есть центр масс системы точек A и B, в которых сосредоточены массы соответственно n и m.

Пример. Даны вершины треугольника $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

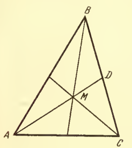


Рис. 25

□ Точка пересечения медиан треугольника делит каждую из медиан в отношении 2:1, считая от соответствующей вершины. Пусть D — середина стороны BC, а M — точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 25).

Точка D делит отрезок BC в отношении 1:1 и поэтому ее координаты равны

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2}.$$

Тогда координаты точки M, делящей отрезок AD в отношении 2:1, равны

$$x_M = \frac{x_A + 2x_D}{3} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3};$$

$$y_M = \frac{y_A + 2y_D}{3} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}. \quad ■$$

Координаты центра масс M системы n материальных точек $A_i(x_i; y_i)$ определяются по формулам

$$x_M = \frac{m_1x_1 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + \ldots + m_n}, \quad y_M = \frac{m_1y_1 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + \ldots + m_n},$$

где m_i — масса, сосредоточенная в точке A_i.

207. Вычислите координаты точки, равноудаленной от точек $A(-4; 0)$ и $B(-3; -7)$ и расположенной: 1) на оси x; 2) на оси y.

208. Даны точки $A(1; 5)$, $B(6; 8)$ и $C(p; 2)$.

1) Найдите на оси x точку, равноудаленную от точек A и B.

2) При каком значении p точки оси x, равноудаленной от точек B и C, не существует?

3) При каком значении p все точки оси y будут равноудалены от точек A и C?

209. Найдите длину вектора:

1) $\bar{a}=(3; 4)$;

2) $\overline{AB}$, где $A(1; 3)$, а $B(-2; 0)$;

3) $\bar{b}=(2; 1; -1)$;

4) $\overline{MN}$, где $M(-1; 5; 2)$, а $N(2; 5; -2)$.

210. Найдите углы между координатными осями и вектором:

1) $\bar{i}+\bar{j}$; 2) $\bar{i}-\bar{j}$; 3) $2\bar{i}+3\bar{j}$; 4) $4\bar{i}-3\bar{j}$;

5) $\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$; 6) $\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$; 7) $-3\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$;

8) $2\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$.

211. Тело, движущееся под углом α к горизонту, имеет горизонтальную и вертикальную составляющие скорости $\bar{v}_x$ и $\bar{v}_y$. Найдите модуль скорости и угол α, если: 1) $|\bar{v}_x|=2$ м/с; $|\bar{v}_y|=1$ м/с; 2) $|\bar{v}_x|=3$ м/с; $|\bar{v}_y|=4$ м/с.

212. Найдите угол между векторами:

1) $\bar{a}=(1; 1)$ и $\bar{b}=\bar{i}$; 2) $\bar{a}=(1; 1)$ и $\bar{b}=\bar{j}$;

3) $\bar{a}=6\bar{i}-2\bar{j}$ и $\bar{b}=9\bar{i}-12\bar{j}$;

4) $\bar{c}=(-3; 1)$ и $\bar{d}=(3; -4)$;

5) $\bar{a}=(2; -2; 1)$ и $\bar{b}=(-4; 1; 1)$;

6) $\bar{c}=(1; 9; 3)$ и $\bar{b}=(-2; 4; 5)$.

213. В точке приложены силы $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ и $\bar{F}_3$. Вычислите углы, которые равнодействующая этих сил образует с составляющими, если:

1) $\bar{F}_1=(3; 4)$, $\bar{F}_2=(1; -2)$, $\bar{F}_3=(-1; 3)$;

2) $\bar{F}_1=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{F}_2=-\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{F}_3=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$.

214. Перпендикулярны ли векторы:

1) $\bar{a}=(-2; 3)$ и $\bar{b}=(-1; 2)$;

2) $\bar{c}=(4; -1)$ и $\bar{d}=(3; 12)$;

3) $\bar{m}=(2; 3; -5)$ и $\bar{n}=(-1; 4; 2)$;

4) $\bar{a}=3\bar{i}-2\bar{j}$ и $\bar{b}=2\bar{i}+3\bar{j}$?

215. Коллинеарны ли векторы:

1) $\bar{a}=(1; 2)$ и $\bar{b}=(-2; -4)$;

2) $\bar{a}=(1; -1; 2)$ и $\bar{b}=(2; 2; -4)$;

3) $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, если $A(8; -2)$, $B(3; 4)$, $C(11; 7)$, $D(-21; 19)$?

216. Даны точки $A(1; 3)$, $B(3; 6)$, $C(6; 4)$, $D(5; 2,5)$.

1) Является ли четырехугольник $ABCD$: а) трапецией; б) параллелограммом? 2) Найдите координаты такой точки M, чтобы четырехугольник $ABCM$ был параллелограммом. Является ли $ABCM$: а) прямоугольником; б) квадратом? 3) Является ли треугольник ABD: а) равнобедренным; б) равносторонним?

217. Определите вид четырехугольника $ABCD$, если:

1) $A(1; 3)$, $B(2; 1)$, $C(-1; 3)$, $D(-2; 5)$;
2) $A(-2; 1)$, $B(1; 5)$, $C(-3; 8)$, $D(-6; 4)$;
3) $A(4; 7)$, $B(2; 8)$, $C(-1; 4)$, $D(1; 3)$;
4) $A(2; 3)$, $B(7; 5)$, $C(10; 2)$, $D(0; -2)$;
5) $A(1; 1)$, $B(2; -1)$, $C(4; 0)$, $D(8; -3)$.

218. Определите вид треугольника ABC, если:

1) $A(1; 0)$, $B(1; 3)$, $C(4; 3)$;
2) $A(1; 3)$, $B(2; -1)$, $C(4; 6)$;
3) $A(1; -1; 3)$, $B(3; -1; 1)$, $C(-1; 1; 3)$.

219. Даны четыре вершины $A(3; 0; 2)$, $B(2; 4; 5)$, $A_1(5; 3; 1)$, $D_1(7; 1; 2)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите координаты вершин: 1) D; 2) B_1; 3) C_1.

220. Найдите координаты середины отрезка AB, если:

1) $A(3; -2)$, $B(5; 12)$; 2) $A(-1; 2; 3)$, $B(1; 3; 1)$;
3) $A(-4; 3)$, $B(-2; 5)$; 4) $A(-4; 3; 2)$, $B(-2; 5; 4)$.

221. Дан отрезок с концами $A(1; -3)$ и $B(31; 17)$. Определите координаты точек отрезка, делящих его: 1) пополам; 2) на три равные части; 3) на шесть равных частей.

222. Найдите координаты концов отрезка, лежащих на осях координат, если его середина находится в точке: 1) $(2; -1)$; 2) $(3; 4)$.

223. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-4; -7)$ и $B(2; 6)$ и точка пересечения его диагоналей $M(3; 1)$. Найдите координаты вершины: 1) противолежащей A; 2) противолежащей B.

224. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC, если:

1) $A(9; -7)$, $B(1; 5)$, $C(-10; -4)$;
2) $A(1; 3)$, $B(3; -7)$, $C(-1; 4)$;
3) $A(-1; 3; 1)$, $B(-3; 2; 4)$, $C(1; 1; 4)$;
4) $A(2; 5; -3)$, $B(-2; 1; 3)$, $C(3; 0; 3)$.

225. Найдите координаты центра масс M системы двух точек $A(4; -3)$ и $B(12; 7)$, в которых сосредоточены массы n и m, если:

1) $n=1$ кг, $m=1$ кг; 2) $n=1$ кг, $m=2$ кг;

3) $n=2$ кг, $m=3$ кг; 4) $n=3$ кг, $m=5$ кг.

226. В точках $A(-3; 2)$, $B(-1; 6)$ и $C(7; 2)$ сосредоточены соответственно массы m_1, m_2, m_3. Найдите координаты центра массы этой системы точек, если:

1) $m_1=2$ кг, $m_2=1$ кг, $m_3=1$ кг;

2) $m_1=3$ кг, $m_2=2$ кг, $m_3=5$ кг.

227. Какими массами можно «загрузить» точки A и B, чтобы центром масс двух получившихся материальных точек оказалась такая точка M, что:

1) $\overline{AM}=\frac{3}{7}\overline{BM}$; 2) $\overline{AM}=0{,}7\overline{AB}$; 3) $\overline{MA}+7\overline{MB}=\overline{0}$?

Однозначно ли определены эти массы?

228. Докажите, что положение центра масс системы материальных точек не изменяется, если все массы этих материальных точек увеличились в одно и то же число раз.

229. В вершинах квадрата $ABCD$ помещены последовательно массы p, q, p, q. Найдите центр масс этой системы точек. Каким будет ответ, если $ABCD$ — параллелограмм?

230*. В вершинах параллелограмма $ABCD$ расположены такие массы, что центр масс получающихся материальных точек совпадает с центром симметрии параллелограмма. Докажите, что в противоположных вершинах находятся равные массы.

§ 6. Уравнения фигур

21. Уравнения с двумя переменными. Уравнение с двумя переменными называется *уравнением данной фигуры на плоскости*, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки фигуры и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих этой фигуре.

Ниже приведен ряд уравнений с двумя переменными и соответствующих им фигур, известных из школьного курса математики:

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ — окружность радиусом R с центром $C(a; b)$;

$ax+by+c=0$, $a^2+b^2\neq 0$ — прямая;

$y=ax^2+bx+c$ или $y=a(x-x_0)^2+y_0$ — парабола;

$y=\frac{k}{x}$ или $xy=k$ — гипербола.

231. Определите, какие из перечисленных точек; $A(-2;\ 1)$, $B(-2;\ 4)$, $C(-3;\ 4)$, $D(1;\ -1)$ принадлежат фигуре, заданной уравнением:

1) $x^2+y^2=25$; 2) $x+3y-1=0$; 3) $y=x^2$;
4) $x=-2$; 5) $x^2+y^2=0$; 6) $x^2-y^2=0$;
7) $xy=-2$; 8) $y=-1$.

Принадлежит ли фигуре начало координат?

232. Дано уравнение фигуры:

1) $x-2y=1$; 2) $x-y=0$; 3) $x=2$; 4) $y=0$;
5) $x^2+y^2=4$; 6) $y=\frac{1}{4}x^2$; 7) $xy=2$;
8) $x^2-y^2=0$; 9) $x=2y^2$.

Найдите точки фигуры: а) имеющие абсциссу, равную 2; б) удаленные от оси абсцисс на расстояние 1; в) имеющие равные абсциссы и ординаты. Укажите хотя бы одну точку, не принадлежащую фигуре.

233. Линия задана уравнением:

1) $x^2+y^2=16$; 2) $x+y=0$; 3) $y=4x^2$; 4) $xy=1$;
5) $(x-1)^2+(y+2)^2=1$; 6) $2x-3y+1=0$;
7) $y=(x+1)^2$; 8) $(x-1)y=1$.

а) Выберите произвольную точку на линии и укажите точки, симметричные ей относительно осей и начала координат. Принадлежат ли они линии? Симметрична ли линия относительно осей и начала координат? в) Укажите оси симметрии и центр симметрии линии.

234. Докажите, что линия, заданная уравнением

$$(x^2+y^2+y)^2=x^2+y^2,$$

1) симметрична относительно оси y;
2) не симметрична относительно оси x.

235. Изобразите фигуру, заданную уравнением:

1) $x+y=0$; 2) $3x-2y+1=0$; 3) $x=-3$; 4) $y=2$;
5) $x^2+y^2=1$; 6) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$; 7) $y=\frac{1}{2}x^2$;
8) $y=2x^2$; 9) $y=(x-1)^2+3$; 10) $y=x^2-2x-1$;
11) $x^2-y^2=0$; 12) $y^2=1$; 13) $(x+1)(y-1)=2$;
14) $x^2+y^2=0$; 15) $y=|x|$; 16) $|y|=|x|$;
17) $|x|+|y|=1$; 18)* $\frac{x}{|x|}=\frac{y}{|y|}$.

236. Изобразите множество точек, удовлетворяющих соотношению:

1) $x-y>0$; 2) $2x-y+1\geqslant 0$; 3) $x>2$;
4) $y\leqslant -2$; 5) $x^2+y^2>4$; 6) $x^2+y^2\leqslant 16$;
7) $(x-1)^2+(y+2)^2>9$; 8) $y\geqslant x^2$.

237. Докажите, что линия, заданная уравнениями: 1) $x^2+2x+y^2=0$; 2) $x^2+y^2-2x+4y-4=0$; 3) $x^2+y^2-4y=0$; 4) $x^2+y^2-8x+2y-64=0$, является окружностью.

238. Напишите уравнение окружности: 1) с радиусом 3 и центром в точке $(1; -2)$; 2) с центром в точке $(-2; 3)$, проходящей через точку $(-5; 6)$; 3) с центром в начале координат, касающейся прямой $y=2$; 4) с центром в точке $(-3; 2)$, касающейся оси x; 5) с диаметром MN, если $M(3; -5)$, $N(7; -3)$; 6) касающейся осей координат в точках $(-3; 0)$, $(0; -3)$; 7)* проходящей через точки $A(2; -2)$; $B(1; -1)$, $C(0; 2)$.

239. Дана окружность $(x+1)^2+(y-2)^2=1$. Составьте уравнение окружности: 1) симметричной данной относительно оси y; 2) симметричной данной относительно оси x; 3) симметричной данной относительно начала координат; 4) полученной параллельным переносом данной на вектор $\bar{a}=(-1; 1)$.

240. Составьте уравнение фигуры, состоящей из точек: 1) разность квадратов расстояний от которых до точек $A(1; 0)$ и $B(-1; 2)$ равна 1; 2) сумма квадратов расстояний от которых до двух данных точек $(-1; 0)$ и $(1; 0)$ равна 12; 3) равноудаленных от начала координат и от точки $A(-4; 2)$; 4) расстояние от которых до начала координат вдвое больше, чем до точки $B(0; 1)$; 5) равноудаленных от прямых $x=2$ и $x=-4$; 6) находящихся на расстоянии 1 от оси x; 7) равноудаленных от точки $A(0; 2)$ и прямой $y=-2$.

241. Дана парабола $y=2x^2-8x+4$.

1) Найдите точки пересечения параболы с осями.

2) Найдите расстояние от вершины до начала координат.

3) Над или под параболой лежит точка $(4; 13)$?

4) Составьте уравнение параболы, равной данной, с вершиной в начале координат и таким же направлением ветвей.

5) Составьте уравнение параболы, симметричной данной относительно оси ординат.

6) Составьте уравнение параболы, центрально симметричной данной.

242. Составьте уравнение параболы: 1) симметричной относительно прямой $x=2$ и проходящей через точки $(3; 2)$ и $(-1; 10)$; 2) с вершиной в точке $(4; 3)$ и проходящей через точку $(5; 1)$, если ее ось параллельна оси y; 3) проходящей через точки $A(0; 1)$, $B(1; 2)$, $C(2; 2)$.

243. Стальной трос, подвешенный за два конца на одинаковой высоте, имеет форму дуги параболы. Расстояние между точками крепления концов 20 м. Размер прогиба троса на расстоянии 2 м от точки крепления равен 13 см. Определите размер прогиба троса посередине между креплениями.

244. Камень, брошенный под углом к горизонту, достиг наибольшей высоты 4 м. Описав параболическую траекторию, он упал в 32 м от точки бросания. На какой высоте находился камень на расстоянии 8 м от точки бросания по горизонтали?

245. Определите взаимное расположение окружностей (пересекаются, касаются, не имеют общих точек):

1) $(x+2)^2+(y-1)^2=16$ и $(x+2)^2+(y+5)^2=25$;

2) $(x-1)^2+(y+3)^2=4$ и $(x+2)^2+(y-1)^2=9$;

3) $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ и $(x-1)^2+(y+2)^2=9$;

4) $(x-3)^2+(y-4)^2=9$ и $(x+5)^2+(y+2)^2=16$.

246. Найдите точки пересечения прямой $y=2x-1$ с параболой:

1) $y=x^2$; 2) $y=-2x^2-1$; 3) $y=x^2-3x+3$.

247. При каких значениях k прямая $y=kx+2$:

1) пересекает параболу $y=4x^2$;

2) не пересекает параболу $y=-2x^2$?

248. Сколько решений имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=x^2-4, \\ xy+1=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=2x^2-2x+1? \end{cases}$

22. Уравнения прямой на плоскости. Любая прямая на плоскости xy может быть задана уравнением первой степени

$$ax+by+c=0, \quad a^2+b^2>0,$$

которое называется *общим уравнением прямой.*

Если в общем уравнении прямой коэффициент b не равен нулю, т. е. прямая не параллельна оси y, то это уравнение можно записать в виде

$$y=kx+l, \text{ где } k=-\frac{a}{b}, \quad l=-\frac{c}{b}.$$

Здесь k — тангенс угла, образованного прямой с положительным направлением оси x, а l — ордината точки пересечения прямой с осью y (рис. 26). Коэффициент k называется *угловым коэффициентом прямой.* Если на прямой $y=kx+l$ заданы две точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$, то $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

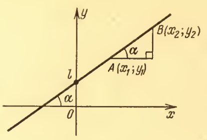


Рис. 26

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, можно представить в виде

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \text{ или } y=k(x-x_0)+y_0.$$

Различные прямые $y=k_1x+l_1$ и $y=k_2x+l_2$ параллельны тогда и только тогда, когда равны их угловые коэффициенты: $k_1=k_2$. Это условие параллельности для прямых $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$ принимает вид $a_1b_2=a_2b_1$ или $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ $(b_1\neq 0,\ b_2\neq 0)$.

Если прямые $y=k_1x+l_1$ и $y=k_2x+l_2$ перпендикулярны, то $k_1k_2=-1$.

Для прямых, заданных общими уравнениями $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$, это условие принимает вид

$$a_1a_2+b_1b_2=0.$$

Взаимное расположение прямых $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$ (параллельность, пересечение, совпадение) определяется количеством решений системы уравнений первой степени с двумя переменными

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0. \end{cases}$$

249. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми:

1) $2x-y+4=0,\ y=0,\ x=0;$
2) $2x-y+4=0,\ y=0,\ x=1;$
3) $2x-y+4=0,\ y=0,\ x=1,\ x=5;$
4) $2x-y+4=0,\ y=1,\ x=1,\ x=5;$
5)* $2x-y+4=0,\ y=1,\ y=10,\ x=1,\ x=5.$

250. Найдите угловой коэффициент прямой, если она: 1) задана уравнением $2x-3y+1=0$; 2) образует угол 30° с осью x; 3) параллельна прямой $8x+4y+3=0$; 4) проходит через точки (1; 1) и (4; 3); 5) параллельна оси абсцисс.

251. Напишите уравнения прямых, изображенных на: 1) рис. 27; 2) рис. 28.

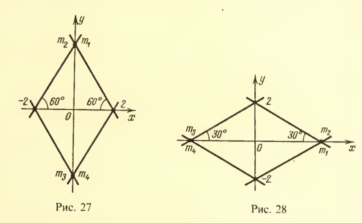


Рис. 27

Рис. 28

252. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; -2)$: 1) параллельно оси x; 2) и образующей с осью x угол 135°; 3) параллельно оси y; 4) параллельно вектору $\bar{a}=(2; 3)$; 5) и точку $B(-3; 2)$; 6) параллельно прямой $3x-2y-3=0$; 7) параллельно биссектрисе первого координатного угла; 8) перпендикулярно вектору $\bar{a}=(2; -1)$; 9) перпендикулярно прямой $3x-y-5=0$; 10)* и отсекающей на оси ординат отрезок длиной 3.

253. Даны точки $M(1; 2)$, $N(-3; -2)$, $P(2; -1)$. Составьте уравнение прямой, проходящей через: 1) точки M и N; 2) точки N и P; 3) точки M и P; 4) начало координат параллельно прямой MN; 5) точку N параллельно прямой MP; 6) точку N перпендикулярно прямой MP; 7) точку P и середину отрезка MN; 8) середину отрезка MN перпендикулярно прямой NP.

254. Даны вершины треугольника $A(-3; 6)$, $B(4; -1)$, $C(-3; -5)$. Составьте уравнение прямой, содержащей: 1) сторону AB; 2) высоту, опущенную из вершины A; 3) сторону AC; 4) медиану, проведенную из вершины C; 5) сторону BC; 6) среднюю линию, параллельную стороне BC.

255. Дана прямая $x-2y+6=0$. 1) Найдите углы наклона прямой к осям x и y; 2) вычислите длину отрезка прямой, заключенного между осями; 3) напишите уравнение прямой, симметричной данной относительно оси x; 4) напишите уравнение прямой, симметричной данной относительно оси y; 5) составьте уравнение прямой, симметричной данной относительно начала координат; 6) составьте уравнение прямой, полученной поворотом данной прямой вокруг точки ее пересечения с осью x на угол $90°$.

256. Составьте уравнение прямой, отрезок которой, заключенный между осями координат, делится в точке $A(2; -1)$ пополам.

257. Точка, двигаясь прямолинейно, в некоторые моменты времени занимает положения $A(5; 2)$ и $B(-1; -2)$. Определите положение этой точки в момент нахождения ее на оси x.

258. Точка движется прямолинейно и в некоторые моменты времени имеет координаты $(-6; 1)$ и $(-4; 3)$. Какая из точек $(1; 8)$ и $(3; 9)$ лежит на ее траектории?

259. Луч света, пройдя через точку $A(2; 3)$ под углом α к оси x, отразился от нее и прошел через точку $B(-5; 4)$. Определите угол α.

260. Найдите точку пересечения прямых:

1) $x-2y=4$, $x+y=1$;

2) $x+3y-3=0$, $3x-y+11=0$;

3) $3x-y+11=0$, $3x-11y-29=0$;

4) $7x-5y+13=0$, $-2x+y-8=0$.

261. Найдите точку, равноудаленную от точек:

1) $A(1; 2)$, $B(-3; 1)$, $C(2; -1)$;

2) $A(6; -3)$, $B(-10; 5)$, $C(2; 9)$.

262. Докажите, что прямая $2x-3y+6=0$ не пересекает отрезка, ограниченного точками $M_1(2; 3)$ и $M_2(1; -2)$.

263. При каких значениях a и c прямая $ax+2y+c=0$: 1) проходит через точки $(2; 1)$ и $(-4; -1/2)$; 2) параллельна прямой $2x-2y+13=0$; 3) перпендикулярна прямой $6x+y-1=0$; 4) пересекается с прямой $x-3y+4=0$?

264. Определите, имеют ли общую точку прямые:

1) $3x+5y=34$, $4x-5y=-13$, $2x-y=1$;

2) $6x-5y=-15$, $13x+3y=-86$, $3x+y=-18$;

3) $y=2x-5$, $y=x+2$, $y=3x-12$;

4) $3x+3y=10$, $x-2y=4$, $y-x+2=0$.

265. Найдите значения k, при которых данные прямые пересекаются в одной точке:

1) $2x-y-5=0, \quad x-y+2=0, \quad kx-y-12=0;$
2) $3x+y+4=0, \quad x+ky+1=0, \quad 2x-y-3=0.$

266. Определите координаты точек пересечения прямой $x-y-1=0$ с окружностью:

1) $x^2+y^2=25;$ 2) $(x-1)^2+(y-2)^2=25.$

267. При каких значениях a прямая $x+y=a$ касается окружности $x^2+y^2=1$?

268. Найдите точку на окружности $x^2+y^2=4$, ближайшую к точке $(-8; -6)$.

23. Эллипс. *Уравнение эллипса* имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0, \quad b>0).$$

При $a=b$ уравнение становится уравнением окружности.

Эллипс можно получить сжатием (растяжением) окружности $x^2+y^2=a^2$ к оси x (от оси x). Для этого каждой точке окружности с координатами $(x; y)$ нужно сопоставить точку с координатами $(x; y_1)$, где $y_1=\frac{b}{a}y$ $\left(\frac{b}{a}\text{— коэффициент сжатия}\right)$.

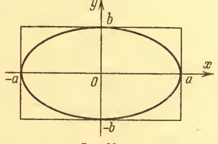


Рис. 29

Эллипс является ограниченной фигурой (рис. 29), состоит из графиков двух функций:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad \text{и} \quad y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Эллипс имеет две оси симметрии, центр симметрии, которые называют соответственно *осями* и *центром* эллипса. Точки пересечения эллипса с осями симметрии называются ***вершинами*** эллипса, а числа a, b — *полуосями*.

269. Дан эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. Найдите точки эллипса: 1) абсцисса которых равна 2; 2) лежащие на осях координат; 3) принадлежащие прямой $x=-2$; 4) отстоящие от оси y на расстояние 2; 5) удаленные от начала координат на расстояние 2; 6) принадлежащие параболе $y=\frac{1}{4}x^2-2$.

270. Вычислите периметр четырехугольника, вершины которого совпадают с вершинами эллипса:

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$; 3) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$.

271. Докажите, что эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ лежит в прямоугольнике, образованном прямыми $x=\pm a$, $y=\pm b$.

272. Выберите произвольную точку на эллипсе $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ и укажите ей симметричные точки относительно осей и начала координат. Принадлежат ли они эллипсу?

273. Известно, что точка $M(2; -3)$ принадлежит эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Найдите координаты еще трех точек, принадлежащих эллипсу.

274. Найдите полуоси эллипса:

1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$; 2) $9x^2+16y^2=1$; 3) $25x^2+16y^2=1$.

275. Запишите уравнение эллипса, который получится, если эллипс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ повернуть на 90 вокруг начала координат.

276. Постройте линию, которая получится, если: 1) ординаты точек окружности $x^2+y^2=16$ уменьшить в 2 раза, не изменяя абсцисс; 2) абсциссы точек окружности $x^2+y^2=9$ уменьшить в 2 раза, не изменяя ординат.

277. Составьте уравнение линии, полученной сжатием окружности $x^2+y^2=25$ к оси x с коэффициентом сжатия k, если: 1) $k=3/5$; 2) $k=2/5$.

278. Определите радиус окружности, сжатием которой к оси x получен эллипс: 1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

279. Постройте линию, определяемую уравнениями:

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$; 3) $4x^2+9y^2=36$.

280. Составьте уравнение эллипса, проходящего через точки M и N, если:

1) $M(4; 0)$, $N(-2; 3)$; 2) $M(3; -2)$, $N(-2\sqrt{3}; 0)$.

281*. Докажите, что сумма расстояний от любой точки эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ до точек $F_1(c; 0)$ и $F_2(-c; 0)$ (называемых фокусами), где $c^2=a^2-b^2$, постоянна и равна $2a$.

24. Параметрическое уравнение линии. Пусть линия на плоскости xy является траекторией движения. Тогда она состоит из точек $(x(t); y(t))$, где $x=x(t)$ и $y=y(t)$ — функции параметра t, изменяющегося на промежутке $[a; b]$. Уравнения $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, называются *параметрическими уравнениями линии.*

Уравнения

$$x=R\cos\omega t,\quad y=R\sin\omega t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega,$$

являются параметрическими уравнениями окружности радиуса R с центром в начале координат и описывают равномерное вращение точки A_t вокруг начала координат с угловой скоростью ω (рис. 30).

Уравнения

$$x=x_0+v_1 t,\quad y=y_0+v_2 t,\quad -\infty<t<+\infty,$$

являются параметрическими уравнениями прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\bar{v}=(v_1; v_2)$, и описывают равномерное и прямолинейное дижение точки M_t со скоростью $\bar{v}=(v_1; v_2)$ (рис. 31).

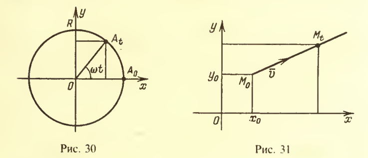


Рис. 30 Рис. 31

В параметрических уравнениях кривой промежуток изменения параметра часто не указывают. Он естественно определяется выражениями, задающими функции $x(t)$, $y(t)$, и

характером описываемого движения. Параметрические уравнения линии иногда можно привести к уравнению с двумя переменными. Для этого нужно исключить параметр t из параметрических уравнений, выразив его из одного уравнения и подставив в другое, или другим способом.

Пример 1. Построить линию $x=2t-1$, $y=1-4t^2$.

□ Найдем t из первого уравнения и, подставив во второе, получим

$$y=1-4\left(\frac{x+1}{2}\right)^2, \text{ или } y=1-(x+1)^2.$$

Эта линия — парабола $y=1-(x+1)^2$, которую можно построить с помощью сдвига параболы $y=-x^2$ вдоль осей x и y (рис. 32). ■

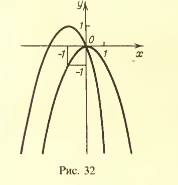


Рис. 32

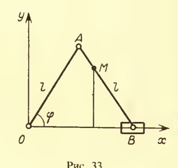


Рис. 33

Пример 2. Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω около неподвижной точки O при помощи шатуна AB, с которым он соединен шарниром в точке A (рис. 33). Определить траекторию точки M шатуна, если $OA=AB=l$ и $AM=a$.

□ Систему координат выберем так, чтобы ось x проходила через точку B, ось y через точку O (рис. 33). Исходя из условия задачи, угол поворота φ кривошипа OA за время t равен ωt. Выразим координаты точки M через угол φ:

$$x=OA\cos\varphi+MA\cos\varphi=(l+a)\cos\omega t,$$
$$y=BM\sin\varphi=(l-a)\sin\omega t.$$

Исключим параметр t из уравнений, воспользовавшись

равенством $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$:

$$\cos^2\omega t+\sin^2\omega t=\left(\frac{x}{l+a}\right)^2+\left(\frac{y}{l-a}\right)^2=1.$$

Следовательно, траекторией движения является эллипс

$$\frac{x^2}{(l+a)^2}+\frac{y^2}{(l-a)^2}=1. \blacksquare$$

282. Постройте траекторию движения точки, если известны уравнения движения:

1) $x=2-t$, $y=1+t$; 2) $x=-1+3t$, $y=4-2t$;
3) $x=t$, $y=1+t^2$; 4) $x=2+t$, $y=1-2t^2$;
5) $x=\cos t$, $y=\sin t$; 6) $x=\cos t$, $y=-\sin t$;
7) $x=\cos 3t$, $y=\sin 3t$; 8) $x=\sin t$, $y=\cos t$;
9) $x=\cos t+1$, $y=\sin t$;
10) $x=5\cos 10t$, $y=3\sin 10t$;
11) $x=2\sin t$, $y=2\cos t+1$;
12) $x=4\sin 2t$, $y=-6\cos 2t$;
13)* $x=3+t^2$, $y=2-t^2$; 14)* $x=1-2t^2$, $y=4-3t^2$;
15)* $x=\cos t$, $y=\sin^2 t$; 16) $x=\cos^2 t$, $y=\sin^2 t$.

283. Выясните, какие из точек $A(0; 2)$, $B(3; 4)$, $C(2; 0)$, $D(2; 1)$ лежат на линии, заданной уравнением:

1) $x=1+2t$, $y=3+t$; 2) $x=2\cos t$, $y=2\sin t$;
3) $x=1+t^2$, $y=1-t^2$; 4) $x=t+1$, $y=1/t$.

284. Движение снаряда, выпущенного из орудия, задано уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$ (x, y — горизонтальная и вертикальная составляющие движения в метрах, t — в секундах). Определите максимальную высоту подъема снаряда и дальность стрельбы, если:

1) $x(t)=40\sqrt{2}t$, $y(t)=-5t^2+40\sqrt{2}t$;
2) $x(t)=40\sqrt{3}t$, $y(t)=-5t^2+40t$;
3) $x(t)=40t$, $y(t)=-5t^2+40\sqrt{3}t$.

285. Составьте параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $(3; -2)$ параллельно вектору: 1) $\bar{a}=(-2; 3)$; 2) $\bar{a}=(-1; 2)$.

286. Точка движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\bar{v}=(1; 2)$. Составьте параметрические уравнения траектории движения точки, если точка в начальный момент ($t=0$) имела координаты $(2; 4)$.

287. Отрезок постоянной длины 3 см скользит своими концами по сторонам прямого угла. Постройте

траекторию движения: 1) середины этого отрезка; 2) точки отрезка, делящей его в отношении 1:2.

288. Напишите уравнение траектории движения точки на плоскости, если эта точка все время остается в два раза дальше от прямой $x=4$, чем от точки $F_1(1; 0)$.

289. Камешек движется со скоростью 12 метров в минуту по ленте транспортера, которая расположена горизонтально на высоте 5 м над поверхностью Земли. Найдите расстояние от конца транспортера до места падения камня и время его падения, пренебрегая сопротивлением воздуха при падении.

Глава 4

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 7. Функции, их свойства и графики

25. Понятие числовой функции и ее простейшие свойства. Задать на некотором числовом множестве функцию $y=f(x)$ — это значит указать правило, которое каждому числу x из этого множества ставит в соответствие одно определенное число y, называемое *значением функции*. Множество чисел, на котором задана функция, называется *областью определения функции*.

Существуют различные способы задания функций: аналитический, графический, табличный, словесный. При аналитическом способе задания функции под ее областью определения (если она не указана) понимается множество всех тех значений x, при которых формула, определяющая функцию, имеет смысл.

График функции $y=f(x)$ — это множество точек координатной плоскости вида $(x;\ f(x))$, где x — произвольное число из области определения функции.

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве X, если для любых x_1 и x_2 из этого множества и таких, что $x_2>x_1$, выполняется неравенство $f(x_2)>f(x_1)$ ($f(x_2)<f(x_1)$). Если функция возрастает (убывает) на всей области определения, то говорят, что $y=f(x)$ — *возрастающая (убывающая) функция*.

Функция $y=f(x)$ называется *четной* (*нечетной*), если для каждого x из области определения функции число $-x$ также принадлежит ее области определения и выполняется равенство

$$f(-x)=f(x) \quad (f(-x)=-f(x)).$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной — относительно начала координат.

Функция $y=f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T\neq0$, что для каждого x из области определения функции значения $x+T$ и $x-T$

также принадлежит ее области определения и при этом выполняются равенства

$$f(x-T)=f(x)=f(x+T).$$

Число T называется *периодом* функции $y=f(x)$.

290. Тело массой 0,3 кг движется прямолинейно под действием силы F. Исходя из закона Ньютона, напишите функцию, выражающую зависимость силы F от ускорения a. Постройте график этой зависимости.

291. При делении числа y на число x в частном получается 3, а в остатке 7. 1) Является ли зависимость переменной y от переменной x функцией? 2) Задайте формулой функцию y от x. 3) Какова область определения этой функции?

292. Принадлежит ли точка $A(1;\ -1)$ графику функции:

1) $y=\sqrt{x}$; 2) $y=5x^2+3x-9$; 3) $y=\frac{x-1}{x+1}$?

293. Пользуясь графиком функции $y=f(x)$, изображенным: 1) на рис. 34, 2) на рис. 35, укажите область определения функции; множество значений функции;

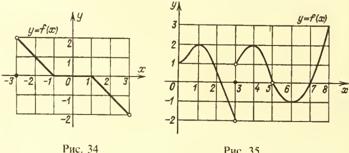


Рис. 34 Рис. 35

точки, в которых функция обращается в нуль; промежутки, на которых функция сохраняет знак.

294. Функция задана формулой

1) $y=\frac{x-1}{2}$; 2) $y=\frac{x^2-1}{2(x+1)}$; 3) $y=-0{,}1x^2-0{,}2x+0{,}3$;

4) $y=\sqrt{x}$; 5) $y=\sqrt[3]{x}$; 6) $y=\begin{cases}x-1 & \text{при } x\leqslant 0;\\ x^2 & \text{при } x>0.\end{cases}$

Какие из чисел -1, 0, 1 принадлежат области определения функции? Найдите соответствующие им значения функции. Принадлежит ли множеству значений функции число -1; число $-1/2$; число 0?

В задачах 295—299 найдите область определения функции:

295. 1) $y=\frac{3x+5}{7x+1}$; 2) $y=\frac{x-5}{2x^2-10x-28}$;

3) $y=\frac{1}{x^2-2x+3}$; 4) $y=\frac{1}{|x|-4}$.

296. 1) $y=\sqrt{-x}$; 2) $y=\sqrt{4x-x^2-3}$;

3) $y=\sqrt{\frac{1-x}{3+x}}$; 4) $y=\sqrt{x-2}-\sqrt{1-x}$; 5) $y=\sqrt{3-|x|}$;

6) $y=\sqrt{|x|-3}$; 7) $y=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2-2}}$;

8) $y=3\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; 9) $y=\frac{\sqrt{2x+18}}{x^2+3{,}8x-6}$;

10) $y=\frac{4x}{\sqrt{x}-5}$; 11) $y=\frac{4x}{x+5}-\sqrt{x^2-7x+6}$;

12) $y=\frac{\sqrt{x+9}-1}{x^2-2x-80}$.

297. 1) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x+1}{x}}$; 2) $y=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x-2}$;

3) $y=\sqrt{(0{,}1)^{x^2-1}-1}$.

298. 1) $y=\lg(4-x)$; 2) $y=\frac{x^2-1}{\lg x+3}$;

3) $y=\log_{0{,}1}\frac{2x-5}{x}$; 4) $y=\log_2(x^2-7x+12)+\sqrt{x-1}$;

5) $y=\sqrt{\lg\frac{x+8}{x-1}-1}$.

299. 1) $y=\frac{1}{\sqrt{2}\sin x-1}$; 2) $y=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos x-1}$;

3) $y=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$; 4) $y=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$;

5) $y=\lg(\sin x+2)$; 6) $y=\log_{0{,}5}(1+\cos x)$.

300. Найдите множество значений функции:

1) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $0\leqslant x\leqslant 1$; 2) $y=\frac{1}{x}$, $-1<x<0$;

3) $y=\lg x$, $10\leqslant x\leqslant 100$; 4) $y=3+2x-x^2$;

5) $y=3+2x-x^2$, $-1\leqslant x\leqslant 3$;

6) $y=\cos x$, $-\pi/4\leqslant x\leqslant \pi/4$.

301. Приведите пример какой-либо функции, областью определения которой является:

1) множество всех действительных чисел за исключением $x=0$;

2) множество всех действительных чисел за исключением $x=0$ и $x=1$;

3) отрезок $[-1; 1]$; 4) интервал $(-1; 1)$.

302. Установите зависимость: 1) объема цилиндра с радиусом основания $r=2$ см от его высоты h и постройте график этой зависимости; 2) объема цилиндра высотой $h=5$ см от радиуса r его основания и постройте график этой зависимости; 3) высоты h цилиндра от радиуса r его основания, если объем цилиндра равен 1 $см^3$. Постройте график этой зависимости

303*. Точка равномерно движется по окружности с центром в начале координат и радиусом 1 м. Найдите зависимость ординаты точки от времени, если в моменты $t=0$, $t=1$ с точка имела соответственно координаты $(1; 0)$ и $(1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$.

304. Выразите зависимость длины одного катета прямоугольного треугольника от длины другого при постоянной гипотенузе. Постройте график этой зависимости.

305. Объем шара V вычисляется по формуле $V={}^4/_3\pi r^3$, где r — радиус шара. Найдите зависимость радиуса шара от его объема. Укажите область определения этой функции.

306. Согласно закону Ома сила тока в цепи J, напряжение на участке цепи U и сопротивление резистора R связаны между собой соотношением

$$J=\frac{U}{R}.$$

Найдите зависимость сопротивления R от силы тока в цепи J, если напряжение на участке цепи U постоянное и равно 6 В.

307. Пользуясь графиком функции $y=f(x)$, изображенным: 1) на рис. 34; 2) на рис. 35, укажите промежутки возрастания и убывания функции.

308. Докажите, что если функция $y=f(x)$ возрастает на некотором множестве, то функция $y=-f(x)$ убывает на этом множестве.

309. Докажите, что сумма двух возрастающих (убывающих) функций также является функцией возрастающей (убывающей).

310. Докажите, что если функция $y=f(x)$ возрастает и $f(x)>0$ на некотором множестве, то функция $y=\frac{1}{f(x)}$ убывает на этом множестве.

311. Будет ли возрастающей (убывающей) функция:

1) $y=7$; 2) $y=1-\frac{x}{2}$; 3) $y=x^2+2x+1$;

4) $y=x^2+2x+1,\ x\geqslant-1$; 5) $y=-\frac{3}{x}$; 6) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$;

7) $y=x+\sqrt{x}$; 8) $y=2x+\lg x$; 9) $y=\frac{1}{\log_{0,1}x}$;

10) $y=\frac{1}{x^2+x+1}$; 11) $y=|x|$; 12) $y=-\frac{1}{\sqrt{x}}$?

312. Какие из следующих функций четные, какие нечетные, а какие не принадлежат ни одному из этих классов:

1) $y=1$; 2) $y=x^4+3x^2+1$; 3) $y=2x-x^2$;

4) $y=\frac{1}{x}$; 5) $y=\frac{5x^4}{2x^6+7}$; 6) $y=\sqrt{x^2}$; 7) $y=(\sqrt{x})^2$;

8) $y=x+\sin x$; 9) $y=x^2+\sin x$; 10) $y=x\cdot\cos x$;

11) $y=x^2\cos x$; 12) $y=\sin x-\cos x$; 13) $y=x\cdot 2^x$;

14) $y=\begin{cases}-1 \text{ при } x<0,\\ \ \ 1 \text{ при } x\geqslant 0;\end{cases}$ 15) $y=\begin{cases}-1 \text{ при } x<0,\\ \ \ 0 \text{ при } x=0,\\ \ \ 1 \text{ при } x>0;\end{cases}$

16) $y=|x-1|$?

313. На рис. 36 изображены графики некоторых функций. Достройте их, если можно, до графиков: 1) четных; 2) нечетных функций, заданных на $[-1;1]$.

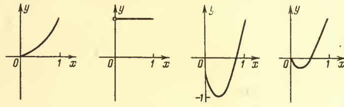


Рис. 36

314. Подберите значения a, b так, чтобы функция $y=ax+b$ была: 1) четной; 2) нечетной; 3) и четной и нечетной.

315. Найдите все четные и все нечетные функции среди функций вида:

1) $y=a\cos x+b\sin x$; 2) $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$.

316. Подберите значения a, b, c так, чтобы функция $y=ax^2+bx+c$ была: 1) четной; 2) нечетной.

317. Какие из следующих функций являются периодическими? Найдите их наименьший положительный период, если он существует:

1) $y=5\sin 3x$; 2) $y=4\cos(2x+1)$; 3) $y=5$; 4) $y=x^2$;

5) $y=\frac{1}{\sin x}$; 6) $y=\operatorname{tg} x+3$; 7) $y=2\sin 3x+\cos 3x$;

8) $y=\sin x+\cos 5x$; 9) $y=\cos^2 x$;

10) $y=2\operatorname{tg} x+5\sin x$; 11)* $y=\sin\frac{1}{x}$.

318. Какие из следующих чисел: -2; -1; 0; 1; 2 принадлежат области определения функции:

1) $y=f(f(x))$; 2) $y=g(g(x))$;

3) $y=f(g(x))$; 4) $y=g(f(x))$,

если $f(x)=\sqrt{x}$ и $g(x)=x^4-4$? Найдите значения функций, соответствующие этим числам.

319. Задайте с помощью формул функции $y=f(g(x))$, $y=g(f(x))$, $y=f(f(x))$, $y=g(g(x))$ и укажите их области определения, если:

1) $f(x)=x+1$, $g(x)=x-1$; 2) $f(x)=x^2$, $g(x)=1-2x$;

3) $f(x)=x^2$, $g(x)=10^x$; 4) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sin x$.

320. Представьте функцию $y=F(x)$ как сложную, составленную из более простых функций, если:

1) $F(x)=(3x+4)^7$; 2) $F(x)=\sqrt{2x+1}$;

3) $F(x)=\cos(5x+2)$; 4) $F(x)=\frac{1}{x^2+1}$;

5) $F(x)=\sin^2 x$; 6) $F(x)=10^{1/x}$; 7) $F(x)=\sqrt{3-\lg x}$;

8) $F(x)=\lg(x^2+4x+1)$; 9) $F(x)=\operatorname{tg}(e^x+1)$.

26. Преобразования графиков функций. 1. График функции $y=f(x)+a$ можно получить из графика функции $y=f(x)$ сдвигом последнего вдоль оси y на $|a|$ единиц: в положительном направлении оси, если $a>0$, и в отрицательном, если $a<0$ (рис. 37).

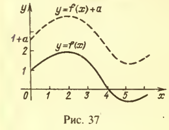


Рис. 37

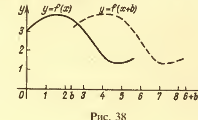


Рис. 38

2. График функции $y=f(x+b)$ можно получить из графика функции $y=f(x)$ сдвигом последнего вдоль оси x на $|b|$ единиц: в отрицательном направлении оси, если $b>0$, и положительном, если $b<0$ (рис. 38).

3. График функции $y=kf(x)$, где $k\neq 0$, можно получить из графика функции $y=f(x)$ растяжением последнего от оси абсцисс в $|k|$ раз, если $|k|>1$, или сжатием его к оси абсцисс в $1/|k|$ раз, если $|k|<1$. При $k<0$ дополнительно выполняется преобразование симметрии относительно оси x (рис. 39).

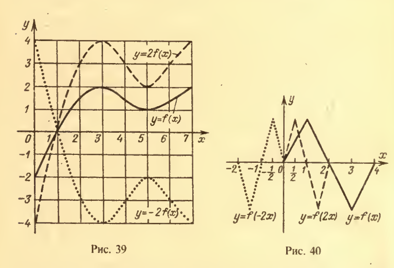


Рис. 39

Рис. 40

4. График функции $y=f(\omega x)$, где $\omega\neq 0$, можно получить из графика функции $y=f(x)$ сжатием последнего к оси ординат в $|\omega|$ раз, если $|\omega|>1$, или растяжением его от оси ординат в $1/|\omega|$ раз, если $|\omega|<1$. При $\omega<0$ дополнительно выполняется преобразование симметрии относительно оси y (рис. 40).

5. График функции $y=kf(\omega x+b)+a=kf\left(\omega\left(x+\frac{b}{\omega}\right)\right)+a$ может быть получен из графика функции $y=f(x)$ последовательным выполнением преобразований 4, 2, 3, 1.

Пример 1. Построить график функции $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

График данной функции $y=3\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ получается из графика функции $y=\sin x$ последовательным выполнением следующих преобразований: а) сжатия его к оси y в 2 раза; б) растяжения от оси x в 3 раза; в) сдвига вдоль оси x на $\pi/6$ единиц в положительном направлении (рис. 41). ■

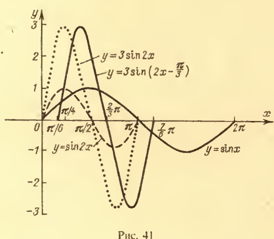


Рис. 41

Пример 2. Построить график функции $y=\frac{4x+3}{2x+1}$.

Выделив «целую часть» дроби, получим

$$\frac{4x+3}{2x+1}=\frac{(4x+2)+1}{2x+1}=2+\frac{1}{2x+1}=2+\frac{1}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}.$$

График этой функции получается из графика $y=1/x$ следующими преобразованиями: а) сжатием его к оси y в 2 раза; б) сдвигом вдоль оси x на $1/2$ единицы в отрицательном направлении оси x; в) сдвигом вдоль оси y на 2 единицы в положительном направлении оси y (рис. 42). ■

В задачах 321—327 постройте график функции:

321. 1) $y=x^2+2$; 2) $y=\sqrt{x}-4$;

3) $y=(1/2)^x-1$; 4) $y=\frac{5}{x}+3$.

322. 1) $y=(x+2)^2$; 2) $y=\sqrt{x+4}$;

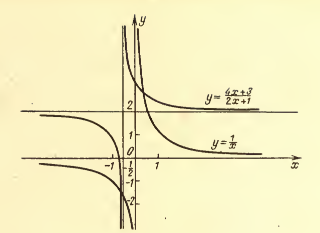


Рис. 42

3) $y=(1/2)^{x-1}$; 4) $y=\frac{5}{x-3}$;

323. 1) $y=x^2-5x+6$; 2) $y=\sqrt{x-1}+2$;

3) $y=(1/2)^{x-1}+1$; 4) $y=\frac{x+2}{x+1}$; 5) $y=(x+1)^3-3$;

6) $y=2+\lg(x-1)$; 7) $y=\frac{1}{3}+\log_3\frac{2x+1}{2}$;

8) $y=\frac{1}{4}(4\sin x-5)$.

324. 1) $y=-\lg x$; 2) $y=\lg(1-x)$;
3) $y=\sqrt{4-x}$; 4) $y=2-\sin x$.

325. 1) $y=2\sin x$; 2) $y=\sin 2x$;

3) $y=\frac{\sqrt{x}}{3}$; 4) $y=\ln\left(\frac{x}{3}\right)$.

326. 1) $y=-4x^2+12x-5$; 2) $y=2\sin(x+1)$;

3) $y=\frac{1}{3}(1-\cos x)$; 4) $y=\cos 2x+\sin 2x$;

5) $y=\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x$; 6) $y=\sin^2 x$;

7) $y=2e^{x/2}-3$; 8) $y=\frac{x}{2x-8}$; 9) $y=\frac{4x+3}{x+1}$.

327. Определите графически, сколько корней имеет уравнение:

1) $x^3=1-\frac{x}{2}$; 2) $2^x=2-x^2$; 3) $x-1=\sqrt[3]{x^2}$;

4) $\sqrt{x}=(x-3)^2$; 5) $\sin x=\frac{1}{x}$; 6) $\cos x=\frac{1}{x}$, $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$;
7) $\ln(-x)=(2+x)^2$; 8) $10^x=\lg x$; 9)* $e^x-1=\ln(x+1)$;
10) $x^2=2\sin x$; 11) $0{,}1x=\log_{0,1}x$; 12) $xe^x=1$.

328. При каких значениях a уравнение:

1) $\frac{1}{x}=ax$; 2) $e^{ax}=x$; 3) $a\cos(ax+1)=1$

не имеет решений? Имеет единственное решение? Имеет два решения? Имеет более двух решений?

§ 8. Предел и непрерывность функции

27. Непрерывность и точки разрыва функции. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если для любого положительного числа ε можно указать такую окрестность точки x_0 $(|x-x_0|<\delta)$, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Функция, непрерывная в каждой точке промежутка, называется *непрерывной на* этом *промежутке*. Если непрерывность функции нарушается в некоторой точке, то эту точку называют *точкой разрыва функции*.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, то приближенному равенству $f(x)\approx f(x_0)$ можно обеспечить любую наперед заданную точность, если x брать из достаточно малой окрестности точки x_0.

Пример 1. С какой точностью нужно взять десятичные приближения числа $\sqrt{7}$, чтобы вычислить значение функции $f(x)=3-100x$ в точке $x_0=\sqrt{7}$ с точностью до 10^{-4}?

⌐ Пусть x_n — десятичные приближения числа $\sqrt{7}$ с точностью до 10^{-n} $(n=1, 2, \ldots)$. По условию задачи должно выполняться неравенство $|f(\sqrt{7})-f(x_n)|<10^{-4}$, т. е

$$|3-100\sqrt{7}-3+100x_n|=100|\sqrt{7}-x_n|<10^{-4}.$$

Отсюда $|\sqrt{7}-x_n|<10^{-6}$. Следовательно, чтобы выполнялось требование задачи, нужно взять десятичные приближения числа $\sqrt{7}$ с точностью до 10^{-6}. ■

329. На рис. 43 изображены графики некоторых функций.

1) Укажите точки разрыва этих функций.

Рис. 43

2) Найдите значения функций в тех точках разрыва, которые входят в их области определения.

330. Приведите примеры функций, непрерывных: 1) в любой точке числовой прямой; 2) при всех значениях x, кроме $x=0$; 3) при всех значениях x, кроме $x=0$, $x=1$.

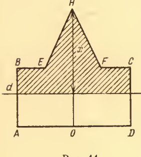


Рис. 44

331. Фигуру $ABEHFCD$, изображенную на рис. 44, пересекает прямая d, параллельная ее основанию.

1) Установите зависимость между длиной отрезка, получаемого в сечении фигуры, и расстоянием x от вершины H до этой прямой, если $AD=OH=4$ см, $EF=AB=2$ см. Постройте график этой функции. Будет ли функция непрерывной?

2) Установите зависимость между площадью части фигуры, лежащей выше прямой d, и расстоянием x. Постройте график этой функции. Будет ли она непрерывной?

332. Сколько цифр после запятой надо взять у числа π, чтобы вычислить с точностью до 10^{-5} значение функции $y=10x-8$ в точке π?

333. Постройте график функции $y=f(x)$ и исследуйте, будет ли она непрерывной в точке x_0, если:

1) $f(x)=x-1, \quad x_0=-5;$

2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+4x-5}{x+5} & \text{при } x\neq -5, \\ 1 & \text{при } x=-5, \end{cases} \quad x_0=-5;$

3) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{при } x\leqslant 1, \\ -x^2 & \text{при } x>1, \end{cases} \quad x_0=1.$

28. Свойства непрерывных функций. Степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические функции непрерывны в своих областях определения.

Непрерывные функции обладают следующими свойствами.

1. Сумма, разность, произведение непрерывных в точке функций также непрерывны в этой точке.

2. Частное $y=f(x)/g(x)$ двух непрерывных в точке x_0 функций есть функция, непрерывная в этой точке, если $g(x_0)\neq 0$.

3. Если непрерывная на некотором отрезке функция принимает на его концах значения разных знаков, то на этом отрезке найдется хотя бы одна точка, в которой данная функция обращается в нуль.

Или иначе: если функция на некотором промежутке непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом промежутке сохраняет постоянный знак.

Пример 1. Исследовать на непрерывность функцию:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+\cos x}{x^4+1}$; 2) $g(x)=\dfrac{3^x+1}{x^2-1}$.

□ 1) Функции $y=x^2+\cos x$ и $y=x^4+1$ непрерывны на $(-\infty;+\infty)$ как суммы непрерывных функций. Следовательно, функция $y=f(x)$, представляющая собой частное двух непрерывных функций со знаменателем, всюду отличным от нуля, также будет непрерывной на $(-\infty;+\infty)$.

2) Функция $y=g(x)$, представляющая собой частное двух всюду непрерывных функций, будет непрерывной в области определения, т. е. на множестве всех действительных чисел, за исключением $x=\pm 1$. Точки $x_1=-1$, $x_2=1$ являются ее точками разрыва. ■

Пример 2. Используя свойства непрерывных функций, доказать, что уравнение $x^5-3x=1$ имеет по крайней мере один корень в промежутке $[1; 2]$.

□ Функция $y=f(x)=x^5-3x-1$ непрерывна на отрезке $[1; 2]$, $f(1)=-3<0$, $f(2)=25>0$. Поэтому согласно свойству 3 существует точка $x_0 \in [1; 2]$, в которой данная функция обращается в нуль, т. е. $x_0^5-3x_0-1=0$. Это и требовалось доказать. ■

Пример 3. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x+5}}{1-x}>1$.

□ Заданное неравенство равносильно неравенству $\frac{\sqrt{x+5}+x-1}{1-x}>0$. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{\sqrt{x+5}+x-1}{1-x}$, которая определена и непрерывна на множестве $[-5; 1) \cup (1; +\infty)$. Решив уравнение $\sqrt{x+5}+x-1=0$, находим точку $x=-1$, в которой эта функция обращается в нуль. Согласно свойству 3 функция $y=f(x)$ сохраняет знак на каждом из промежутков $[-5; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$. Чтобы определить этот знак, достаточно вычислить значения функции в какой-либо одной точке для каждого промежутка. Так как $f(-5)=-1$, $f(0)=\sqrt{5}-1>0$, $f(4)=-2$, то $f(x)>0$ на интервале $(-1; 1)$.

Ответ: $(-1; 1)$. ■

334. Исследуйте функцию на непрерывность. Найдите точки разрыва и постройте эскиз графика функции в окрестностях этих точек:

1) $y=\frac{1}{3x+1}$; 2) $y=\frac{1}{x^2+2x^4}$; 3) $y=\frac{x-1}{x-1}$;

4) $y=\frac{2x+x^2}{x}$; 5) $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2-x+5}$; 6) $y=\frac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}$;

7) $y=\frac{1}{|x|+10}$; 8) $y=\frac{1}{|x|-10}$; 9) $y=\frac{x+1}{3^x}$;

10) $y=\frac{1}{2^x-1}$; 11) $y=\frac{x}{1+\cos x}$; 12)* $y=\frac{\sqrt{2x+3}}{x^2+4x+3}$.

335. Используя свойства непрерывных функций, докажите, что следующее уравнение имеет решение на указанном промежутке:

1) $x^3+3x+1=0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 0$;
2) $x^6-5x+1=0, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$;
3) $\sin x - x + 1 = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$;
4) $x = 2^{-x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$.

336*. Докажите, что все три корня уравнения $x^3-3x+1=0$ лежат на отрезке $[-2; 2]$.

337. Решите неравенство:

1) $(x-2)(x+1)(x-5)<0$; 2) $x(4x^2-1) \geqslant 0$;

3) $(x^2+6x-7)(3x+2) \leqslant 0$; 4) $\frac{5x-2}{x+1}<5$; 5) $\frac{1+x^2}{2x} \leqslant 1$;

6) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+3}<\frac{3}{x+2}$; 7) $\frac{x-1}{x^2-4}>0$; 8) $\frac{x(x^2-1)}{(3x-1)(x+1)} \leqslant 0$;

9) $\frac{x^3-8}{1-5x} \geqslant 0$; 10) $(2x-5)^3(7x-x^2-12)<0$;

11) $(x-1)^2(x+3)(x-5) \geqslant 0$; 12) $\frac{(x+1)^5(3x-1)}{x^2} \leqslant 0$;

13) $\frac{\sqrt{x}-2}{(x-1)(x+3)}>0$; 14) $x+4<\sqrt{x+46}$;

15) $\frac{(x+3)\sqrt{x^2-x-12}}{x(x+4)} \geqslant 0$; 16) $\frac{\sqrt{2x}-1}{x-5} \geqslant 1$;

17) $(1+x)\sqrt{x^2+1}>1-x^2$.

29. Предел функции и его свойства. Число A называют *пределом функции* $y=f(x)$ при x, стремящемся к x_0 (пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$), если для любого положительного числа ε можно указать такую окрестность точки x_0, т. е. интервал, содержащий точку x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

При вычислении пределов пользуются следующими правилами: если существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, где k — постоянная;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ при условии, что $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-3x+12}{4x+5}$.

Так как $\lim\limits_{x \to -1} (4x+5) = 4 \lim\limits_{x \to -1} x + \lim\limits_{x \to -1} 5 = -4+5 = 1 \neq 0$ и $\lim\limits_{x \to -1} (x^3-3x+12) = \lim\limits_{x \to -1} x^2 - 3 \lim\limits_{x \to -1} x + \lim\limits_{x \to -1} 12 = 16$, то, применяя правило 4 о пределе частного, получаем

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-3x+12}{4x+5} = \frac{\lim\limits_{x \to -1} (x^2-3x+12)}{\lim\limits_{x \to -1} (4x+5)} = \frac{16}{1} = 16. \ \blacksquare$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+x}{x+1}$.

Правило нахождения предела частного здесь неприменимо, так как предел знаменателя при $x \to -1$ равен нулю. Преобразуем дробь, разложив числитель на множители:

$$\frac{x^2+x}{x+1} = \frac{x(x+1)}{x+1} = x \text{ при } x \neq -1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+x}{x+1} = \lim_{x \to -1} x = -1. \ \blacksquare$$

Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, если: а) она определена в этой точке; б) существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$; в) этот предел равен значению функции в точке x_0, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Пример 3. При каком значении A функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{при } x \neq -2, \\ A & \text{при } x = -2 \end{cases}$$

будет непрерывной в точке $x = -2$?

□ Непрерывность функции в точке $x=-2$ обеспечивается выполнением равенства $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=A$. Так как

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-4,$$

то $A=-4$. ■

Непрерывность функции можно использовать для вычисления пределов. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, то для нахождения предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ достаточно вычислить значение этой функции в точке x_0, так как $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1+2\sin x}{3x+\cos x}$.

□ Функция $y=\dfrac{1+2\sin x}{3x+\cos x}$ непрерывна в точке $x=\pi/2$, поэтому

$$\lim_{x\to \pi/2}\frac{1+2\sin x}{3x+\cos x}=\frac{1+2\sin \pi/2}{3\pi/2+\cos \pi/2}=2/\pi. \ ■$$

338. На рис. 45 изображен график функции $y=f(x)$.

1) Укажите точки разрыва функции.

2) Существует ли предел в каждой из этих точек разрыва? Если существует, то чему он равен?

3) Какие условия непрерывности нарушены в точках разрыва?

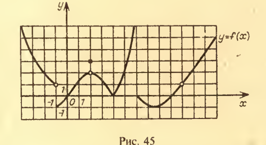


Рис. 45

339. Постройте график какой-либо функции, которая:

1) определена в точке x_0, но не имеет предела в этой точке;

2) определена в точке x_0, имеет предел в этой точке, но разрывна;

3) не определена в точке x_0, но имеет предел в этой точке.

340. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+5x-6)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+2e^x)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)(3x-5)^{10}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1/3}(2^x+9x^2-\sqrt[3]{2})$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+8x^3}{2x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2+8x+15}$;

7) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-8x+15}$; 8) $\lim\limits_{t\to 1/2}\frac{2t^2+t-1}{4(1-t^2)-3}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}\right)$; 10) $\lim\limits_{x\to \ln 2}\frac{e^{2x}+e^x-2}{e^x+2}$;

11) $\lim\limits_{x\to \ln 2}\frac{e^{2x}-e^x-2}{e^x-2}$; 12) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$;

13) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{\sqrt{x-2}}+1\right)$; 14) $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$; 16) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg} x}$;

17) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

341. При каком значении A функция

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{при } x\neq x_0, \\ A & \text{при } x=x_0 \end{cases}$$

будет непрерывной в точке x_0, если:

1) $f(x)=(x^2+1)^5$, $x_0=0$; 2) $f(x)=\frac{3x-2}{9x-6}$, $x_0=\frac{2}{3}$;

3) $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, $x_0=1$; 4) $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x+3}$, $x_0=-3$.

Предел функции на бесконечности. Число A называют *пределом функции $y=f(x)$ при x, стремящемся к $+\infty$*, и пишут

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A,$$

если для любого положительного числа ε можно указать такой промежуток $(M; +\infty)$, что для всех

x из этого промежутка выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Число A называют *пределом функции* $y=f(x)$ *при* $x\to-\infty$ и пишут

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A,$$

если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)=A$.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ одновременно, то число A называют *пределом функции при* x, *стремящемся к* ∞, и пишут

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

Для этих пределов сохраняются все вышеприведенные свойства предела функции в точке.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\dfrac{5x^2+x+1}{x^2+0,3}\right)$.

□ На основании свойства показательной функции $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$. Найдем предел второго слагаемого: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2+x+1}{x^2+0,3}$. Предела и числителя, и знаменателя не существует, поэтому непосредственно применять теорему о пределе частного нельзя. В этом случае числитель и знаменатель делим на x^2, а затем применяем теоремы о пределах:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+x+1}{x^2+0,3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{0,3}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{0,3}{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}5+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{0,3}{x^2}}=\frac{5+0+0}{1+0}=5.$$

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x}+\frac{5x^2+x+1}{x^2+0,3}\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+x+1}{x^2+0,3}=$$
$$=0+5=5. \blacksquare$$

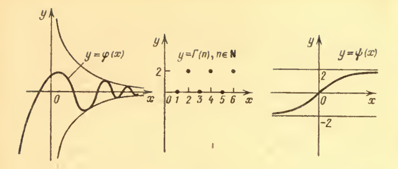


Рис. 46

342. На рис. 46 изображены графики функций. Какие из них имеют предел при: 1) $x \to +\infty$; 2) $x \to -\infty$; 3) $x \to \infty$?

343. Имеет ли функция $y = f(x)$ предел при $x \to +\infty$, если:

1) $f(x) = 1$; 2) $f(x) = 10^x$; 3) $f(x) = (0,1)^x$;

4) $f(x) = \dfrac{1000}{x}$; 5) $f(x) = 1 + x + x^2$; 6) $f(x) = \sin x$?

344. Имеет ли предел последовательность (x_n), если:

1) $x_n = (-1)^n$; 2) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$; 3) $x_n = n$; 4) $x_n = (0,1)^n$?

345. Постройте график какой-либо функции, если известно, что: 1) ее предел при $x \to +\infty$ равен -1; 2) она не имеет предела при $x \to -\infty$; 3) ее предел при $x \to \infty$ равен 1; 4) ее предел при $x \to +\infty$ равен 1, а при $x \to -\infty$ равен -1.

В задачах 346—348 вычислите предел:

346. 1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(3 + \dfrac{2}{x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x+4}{10x+1}$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x^4+2x+1}$; 4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x+5)^2}{8x^2}$;

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{2x-1}{x+4}\right)$; 6) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{3-n}{2n+1} - \dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}\right)$;

7) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n}{n^2+1} + \dfrac{1}{n}\right)$; 8) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+x+1} - x\right)$;

9) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(10 + \dfrac{3}{x} + e^{-x}\right)$.

347. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{3^x+1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2^n+3^n}{3^n+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-\frac{x^2}{x+2}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{7x+4}$; 6)* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$;

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} y$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} y$, где $y=\begin{cases}\frac{1}{2x+1}, & \text{если } x>0,\\ \frac{5x}{4x-1}, & \text{если } x\leqslant 0.\end{cases}$

§ 9. Производная и дифференциал функции

30. Производная, ее физический смысл. *Производной функции* $y=f(x)$ *в точке* x_0 называется предел отношения приращения функции

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

в точке x_0 к приращению аргумента $\Delta x=x-x_0$, когда последнее стремится к нулю. Производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$. Таким образом,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Производные основных элементарных функций

1) $(c)'=0$; 2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$; 3) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$;

4) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$; 5) $(a^x)'=a^x\ln a$; 6) $(e^x)'=e^x$;

7) $(\cos x)'=-\sin x$; 8) $(\sin x)'=\cos x$; 9) $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$;

10) $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$; 11) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12) $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

Производную $f'(x_0)$ можно трактовать как скорость изменения переменной y относительно переменной x в точке x_0. В частности, если $x=x(t)$ — закон прямолинейного движения материальной точки, то

скорость движения в момент времени t_0 равна производной $x'(t_0)$ координаты по времени при $t=t_0$.

Операция вычисления производной называется *дифференцированием*. Функция, имеющая производную в некоторой точке, называется *дифференцируемой в этой точке*. Функция, имеющая производную в каждой точке промежутка, называется *дифференцируемой на этом промежутке*.

Для дифференцируемых функций справедливы следующие правила нахождения производных:

1) $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$;

2) $(kf(x))'=kf'(x)$, где k — постоянная;

3) $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$;

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}\quad (g(x)\neq 0)$;

5) $(f(g(x))'=f'(u)\cdot g'(x)$, где $u=g(x)$.

Пример 1. Вычислить производную функции $y=\frac{x^2}{e^x+1}$ в точке $x=0$.

□ Применяя последовательно правила дифференцирования 4) и 1), а также формулы 2) и 6), получаем

$$y'=\frac{(x^2)'(e^x+1)-(e^x+1)'x^2}{(e^x+1)^2}=\frac{2x(e^x+1)-x^2e^x}{(e^x+1)^2}.$$

Отсюда $y'(0)=0$. ■

Пример 2. Найти производную функции $y=\sqrt{3x^2+5}$.

□ Будем рассматривать данную функцию как сложную, составленную из функций $y=\sqrt{u}$, $u=3x^2+5$. Тогда согласно правилу 5 получим

$$y'=(\sqrt{u})'(3x^2+5)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 6x=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+5}}.\ ■$$

Пример 3. Угол φ поворота шкива в зависимости от времени t задан функцией $\varphi=(2t^2+3t+1)$ рад. Найти угловую скорость ω при $t=4$ с.

□ Если $\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)$ — угол поворота шкива за промежуток времени $[t;\ t+\Delta t]$, то $\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}$ — средняя угловая скорость шкива, а

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}=\varphi'(t)$$

— угловая скорость $\omega(t)$ в момент времени t. Следовательно, $\omega(4)=\varphi'(4)$ рад/с. Так как $\varphi'(t)=4t+3$, то $\varphi'(4)=19$ рад/с и $\omega(4)=19$ рад/с. ■

Найдите производную функции (348—353)

348. 1) $y=-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4$; 2) $y=x-\operatorname{tg}x+1$;

3) $y=2x+\sin x$ в точке $x=\pi/3$; 4) $y=x^{\sqrt{2}}+(\sqrt{2})^x$;

5) $y=e^x+4\sqrt{x}-\sqrt[4]{3}$ в точке $x=1$;

6) $y=\frac{4x^3-2x^2+x+1}{x^2}$; 7) $y=\frac{5\sqrt{x}+x+1}{\sqrt{x}}$;

8) $y=\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$; 9) $y=\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$;

10) $y=\frac{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}{3^x}$ в точке $x=0$.

349. 1) $y=(x^2+5x+1)\cdot(x^2-3x+5)$;

2) $y=(\sqrt{x}+\sqrt{2})(e^x+e^2)$;

3) $y=(2+\sqrt{x})(1+\sqrt[4]{x})$ в точке $x=16$;

4) $y=-\frac{x}{4}\cos x+\frac{x}{4}\sin x$; 5) $y=e^x\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$;

6) $y=\frac{x^2+1}{x^2}\operatorname{arctg}x$; 7) $y=\frac{3^x}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt{3}$;

8) $y=x\lg x+10^x$ в точке $x=1$;

9) $y=\frac{\ln x\cdot\sin x}{3\cos x}$; 10) $y=\frac{1}{x}\left(x^3\sqrt{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}\right)$.

350. 1) $y=\frac{1}{1-x^2}$; 2) $y=\frac{2x+1}{x+2}$;

3) $y=\frac{1}{t^2+t+1}$ в точке $t=3$; 4) $y=\frac{3\sqrt{x}}{0{,}1-2x^2}$;

5) $y=\frac{1}{\ln x}+\ln x$ в точке $x=e$; 6) $y=\frac{4^x}{(x+1)2^{x+1}}$;

7) $y=\frac{3^x+3x}{3^x-3x}$ в точке $x=0$;

8) $y=\frac{\sin 2\alpha}{\alpha(1-\cos 2\alpha)}$ в точке $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

351. 1) $y=(2x+1)^{10}$; 2) $y=(5-3x)^4$;

3) $y=\cos^2 x$; 4) $y=(1-3\sqrt{x})^3$; 5) $y=(v^2+v+1)^{3/2}$.

6) $y=\sqrt{5t^2+1}$; 7) $y=\sqrt{\operatorname{arctg}x}$; 8) $y=\sqrt{\frac{x}{x+1}}$;

9) $y=\sqrt{1{,}5+\ln 10\cdot \lg x}$; 10) $y=\sqrt[3]{\frac{1}{4}(x+e^{x})}$;

11) $y=\left(1+\frac{\lg x}{2}\right)^{5}$; 12) $y=\frac{1}{(x-5x^{2}+1)^{2}}$;

13) $y=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^{3}$; 14) $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$; 15) $y=\frac{1}{2}e^{2x+1}$;

16) $y=0{,}1^{0{,}5x^{2}+x+0{,}5}$; 17) $y=e^{\sqrt{x}}+\sqrt{e^{x}}$; 18) $y=10^{\frac{x-1}{x+1}}$;

19) $y=\ln\left(\frac{u}{5}-\frac{1}{2}\right)$; 20) $y=\lg(1-3\sqrt[3]{x})$;

21) $y=\ln(\sin x+\cos x)$; 22) $y=\operatorname{tg}\frac{x+2}{10}$;

23) $y=\frac{\sin(0{,}5x+1)}{\sin 0{,}5}$; 24) $y=\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{\sin x}$;

25) $y=\frac{1}{\cos(4-7x)}$; 26) $y=\operatorname{ctg}(5(x^{2}+x+1))$;

27) $y=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

352. 1) $y=\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg}^{2}x}$; 2) $y=\frac{\sin\varphi+\cos\varphi}{e^{\varphi}}$;

3) $y=\frac{x^{3}+1}{x^{2}-1}$; 4) $y=\frac{1}{x-\sqrt{x^{2}+1}}$; 5) $y=\sqrt{e^{2x/(x+1)}}$;

6) $y=\ln\frac{3x+1}{x+3}$; 7) $y=e^{0{,}5\ln(\cos x)}$; 8) $y=\frac{x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$;

9) $y=\lg\sqrt{\frac{x}{10^{x}}}$.

353. Дано уравнение прямолинейного движения тела: $s=3t^{2}+2$, где s — путь, пройденный телом, м; t — время, с. Найдите: 1) среднюю скорость движения за следующие промежутки времени: $[1; 2]$, $[1; 1{,}1]$, $[1; 1{,}01]$, $[1; 1{,}001]$; 2) скорость тела в момент времени $t=1$ с.

354. Высота брошенного вертикально вверх тела изменяется по закону $h=2+9t-3t^{2}$, где h — высота, м; t — время, с. Найдите: 1) начальную скорость движения; 2) скорость тела в моменты времени $t_1=0{,}5$ с, $t_2=1$ с; 3) наибольшую высоту его подъема.

355. Точка движется по прямой так, что ее расстояние от начального пункта увеличивается пропорционально квадрату времени. Найдите скорость точки

через 3 с после начала движения, если к этому моменту времени она прошла путь, равный 18 м. Сравните ее со средней скоростью движения за указанный промежуток времени.

356. Материальная точка совершает гармоническое колебание по закону

$$x = \frac{3 \sin \pi t}{\pi},$$

где x — координата точки, м; t — время, с. 1) Найдите скорость движения в моменты времени $t_1 = 1/6$, $t_2 = 1/4$, $t_3 = 1$ с. 2) В какие моменты времени меняется направление движения? 3) В какие моменты времени точка имеет наибольшую скорость?

357. При торможении угол поворота маховика изменяется по закону $\varphi = 8 + 50t - 5t^2$, где φ — угол поворота, рад; t — время, с. Найдите: 1) величину угловой скорости в моменты времени $t_1 = 0{,}1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1{,}9$ с; 2) момент времени, когда вращение прекратится.

358. Тело массой 1,5 кг движется прямолинейно по закону $s = t^3 - 16t^2 + 64t$, где s — координата тела, м; t — время, с. Определите: 1) в какие моменты времени тело находилось в начале координат; 2) в какие моменты времени его скорость равнялась нулю; 3) кинетическую энергию тела через 2 с после начала движения.

359. Прямолинейное движение точки совершалось по закону

$$s = \begin{cases} 3t^2 - t^3 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ 4 & \text{при } 2 < t \leqslant 3, \\ t^2 - 6t + 13 & \text{при } 3 < t \leqslant 4, \\ 2t - 3 & \text{при } 4 < t \leqslant 6, \end{cases}$$

где s — путь, пройденный точкой, м; t — время, с. 1) Укажите промежуток времени, когда точка двигалась равномерно; когда сделала остановку. 2) Определите скорость движения в моменты $t_1 = 1$ с, $t_2 = 3{,}5$ с, $t_3 = 5$ с. 3) Определите среднюю скорость за первые две секунды; за четвертую секунду; за 6 с движения. 4) Постройте график зависимости скорости точки от времени. В какой момент времени точка имела наибольшую скорость?

360. Барометрическое давление p изменяется с высотой h по закону $p = p_0 e^{ch}$, где p_0 — нормальное давление,

c — некоторая постоянная. На высоте 5540 м давление равно половине нормального. Установите зависимость скорости изменения давления от высоты.

361. Какая из функций $y=2x+5$, $y=e^x$, $y=\frac{3}{2}x^2$ имеет наибольшую скорость изменения в точке:
1) $x_0=0$; 2) $x_0=1$; 3) $x_0=2$?

362. Количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника, изменяется по закону

$$q=3\sin 2\pi t,$$

где q — заряд, Кл; t — время, с. Какова сила тока в момент времени $t=4$ с?

363. На рис. 47 изображен график прямолинейного движения. Является ли это движение равномерным?

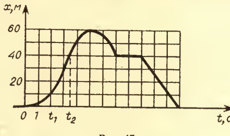


Рис. 47

Укажите промежуток времени, в течение которого движение было равномерным.

С какой скоростью двигалось тело в течение этого промежутка времени?

31. Геометрический смысл производной. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то к ее графику в точке $A(x_0; f(x_0))$ можно провести невертикальную касательную, угловой коэффициент которой равен $f'(x_0)$.

Уравнение касательной имеет вид

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Пример 1. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3-2x^2+2$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

□ В этом примере $x_0=1$, $f(x_0)=f(1)=1$, $f'(x)=3x^2-4x$, $f'(x_0)=f'(1)=-1$. Подставляя эти числа в уравнение касательной, получим $y=1-1\cdot(x-1)$, т. е. $y=2-x$. ■

Пример 2. В каких точках касательные к кривой $y=x^3+x-2$ параллельны прямой $y=4x-1$?

☐ Из условия параллельности двух прямых следует, что угловой коэффициент касательных в искомых точках должен быть равен 4. Тогда абсциссы точек касания найдем, используя равенство $y'(x)=4$, т. е. $3x^2+1=4$, отсюда $x_1=1$, $x_2=-1$. Соответствующие ординаты равны $y_1=0$, $y_2=-4$. Искомые точки $A(1; 0)$, $B(-1; -4)$. ■

364. Через точки $A_1(0; 0)$ и $A_2(x_0; y_0)$ кривой $y=x^3$ проведена секущая A_1A_2. Найдите угловой коэффициент: 1) секущей, если $x_0=1$, $x_0=0{,}1$, $x_0=0{,}01$, $x_0=0{,}001$; 2) касательной к данной кривой в точке A_1.

365. Какой угол (острый или тупой) образует с положительным направлением оси x касательная к графику функции: 1) $y=(1-2x)^3$; 2) $y=x+\frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0=2$?

366. Напишите уравнения касательных к параболе $y=x^2-2x-15$ в точках: 1) с абсциссой $x=0$; 2) с абсциссой $x=-1$; 3) с ординатой $y=-7$; 4) пересечения ее с осью абсцисс; 5) пересечения ее с прямой $y=1-2x$.

367. Напишите уравнение касательной к гиперболе $y=\frac{x+3}{x+1}$ в точке: 1) пересечения ее с осью y; 2) пересечения ее с осью x; 3) с абсциссой $x=1$.

368. В каких точках касательные к кривой $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+\frac{5}{3}$ параллельны: 1) оси x; 2) прямой $y=3x+1$; 3) касательной к кривой $y=-x-\frac{1}{x}$ в точке $(1/3; -10/3)$?

369. На рис. 47 изображен график прямолинейного движения. В какой момент времени (t_1 или t_2) тело имело бо́льшую скорость?

370*. Найдите касательную к параболе $y=x^2-4$, проходящую через точку A (2; -1). Сделайте чертеж.

32. Производная второго порядка. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке, то ее производная $y=f'(x)$ также является функцией, заданной на этом промежутке. Если $y=f'(x)$ дифференцируема, то ее производную называют *второй*

производной функции $y=f(x)$ и обозначают $f''(x)$ или $\frac{d^2f}{dx^2}$, т. е. $f''(x)=(f'(x))'$.

Вторая производная $f''(x)$ выражает скорость изменения первой производной, т. е. ускорение изменения функции $y=f(x)$ в точке x. Если $x(t)$ координата прямолинейно движущейся точки в момент времени t, то $x''(t)$ — ускорение точки в этот момент времени.

371. Найдите вторую производную функции:

1) $y=x^5+\frac{1}{3}x^4+2x^3+4$ в точке $x=-1$; 2) $y=\sqrt{x}$;

3) $y=\frac{1}{1+2x}$ в точке $x=2$; 4) $y=\left(2x+\frac{1}{2}\right)^5$;

5) $y=e^{1-3x}$ в точке $x=1$; 6) $y=\frac{\ln(5x+2)}{3}$;

7) $y=\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$; 8) $y=x(e^x+1)$; 9) $y=\ln x+x^2$;

10) $y=\frac{1+x}{1-x}$ в точке $x=0$; 11) $y=\operatorname{tg} x$.

372. Точка движется прямолинейно по закону $x=\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{2}-3t^2+6t$, где x координата точки, м; t — время, с. 1) Найдите ее скорость и ускорение в моменты $t=1$ с, $t=3$ с, $t=4$ с. 2) Определите момент времени, когда ускорение равно нулю. 3) В какие промежутки времени скорость возрастает? 4) В какие промежутки времени скорость убывает? 5)* Чему равно ускорение точки в те моменты, когда она проходит через начало координат?

373. Диск вращается в жидкости по закону $\varphi=50(1-e^{-0{,}04t})$, где φ — угол поворота диска, рад; t — время, с. Найдите ускорение вращения диска в моменты времени $t_1=0$, $t_2=5$ с.

374. По прямой линии движутся две точки. Закон движения первой точки задан функцией $y=f(x)$, а закон движения второй точки функцией $y=g(x)$. Определите, в какие моменты времени точки имеют одинаковое ускорение, если:

1) $f(t)=\sin 2t$, $g(t)=2t^2+3t+1$;
2) $f(t)=t^4+2t^3+5t+1$, $g(t)=12t^2$;
3) $f(t)=e^t$, $g(t)=5t^2+\frac{4}{3}t+\frac{1}{2}$.

375. Найдите модуль силы, действующей на тело массой 300 г, в момент времени $t_0=1$ с, если тело

движется прямолинейно и его скорость изменяется по закону: 1) $v=2t^3+3$; 2) $v=\frac{1}{t+1}$, где v — скорость, м/с; t — время, с.

376. Тело постоянной массы движется по закону $s=t^2+4$, где s — путь, пройденный телом, м; t — время, с. Докажите, что сила, действующая на него, постоянна.

377. Докажите, что величина ускорения гармонического колебания $x=5\sin(2t+1)$ пропорциональна отклонению x от положения равновесия. Найдите коэффициент пропорциональности.

33. Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то выражение вида $f'(x_0)\Delta x$, где $\Delta x=x-x_0$, называется *дифференциалом функции в точке* x_0 и обозначается $df(x_0)$ или $dy(x_0)$. Дифференциал независимой переменной dx считают равным ее приращению Δx, поэтому

$$df(x_0)=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)\,dx.$$

Если провести касательную к графику функции $y=f(x)$ в точке $A(x_0; f(x_0))$, то дифференциал $f'(x_0)\,dx$ равен приращению ординаты этой касательной, соответствующему приращению $\Delta x=x-x_0$.

Замена приращения функции в некоторой точке ее дифференциалом приводит к следующим формулам:

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \quad (1)$$

$$f(x)-f(x_0)\approx f'(x_0)(x-x_0). \quad (2)$$

Первая из этих формул используется для приближенного вычисления значения функции в некоторой заданной точке; вторая — для приближенного вычисления приращения функции в точке.

Пример 1. Вычислить приближенно значение функции $f(x)=\sqrt{4x^2+3x+2}$ в точке $x=1{,}003$.

□ Значение функции и ее производной

$$f'(x)=\frac{8x+3}{2\sqrt{4x^2+3x+2}}$$

легко вычислить при значении $x_0=1$, которое близко к $x=1{,}003$: $f(1)=3$, $f'(1)=11/6$, $\Delta x=0{,}003$. Согласно формуле (1) имеем $f(1{,}003)\approx 3+\frac{11}{6}\cdot 0{,}003\approx 3{,}006$. ■

Пример 2. Вычислите приближенно $10^{0,99}$.

☐ Положим в формуле (1) $f(x)=10^x$ и $x_0=1$. Тогда $f'(x)=10^x \ln 10$, $\Delta x=-0{,}01$ и $10^{0,99}\approx 10-10\cdot 0{,}01\times \ln 10\approx 10-0{,}1\cdot 2{,}303=9{,}7697$. ■

Пример 3. Даны два кубика, ребра которых соответственно равны 5 см и 4,98 см. На сколько приближенно объем второго кубика меньше объема первого?

☐ Объем v куба с ребром x равен $v=x^3$. Вычислим приближенно приращение этой функции при $x=5$ по формуле (2). Так как $v'=3x^2$, $v'(5)=75$, $\Delta x=4{,}98-5=-0{,}02$, то $\Delta v(5)=75\cdot(-0{,}02)=-1{,}5$, т. е. объем второго кубика меньше объема первого приближенно на 1,5 см^3. ■

378. Найдите приращение и дифференциал функции $y=e^x$ в точке $x=0$ при: 1) $\Delta x=1$; 2) $\Delta x=1/2$; 3) $\Delta x=1/4$. Проиллюстрируйте на чертеже зависимости величины $|\Delta y-dy|$ от приращения аргумента Δx.

379. Для функции $y=x^3+x$ найдите Δy и dy в точке $x=1$, если: 1) $\Delta x=1$; 2) $\Delta x=0{,}1$; 3) $\Delta x=0{,}01$. Какова абсолютная и относительная погрешности от замены Δy на dy?

380. Найдите дифференциал функции:

1) $y=1/2\cdot\sqrt{x}$ в точке $x=1$; 2) $y=x\cos x+\sin x$;

3) $y=\dfrac{\cos x}{1+x^2}$; 4) $y=\ln(\sin x)$; 5) $y=\sqrt{5x+2}$;

6) $y=2^{-\frac{1}{x}+x}$; 7) $y=|x|$ в точках $x=\pm 1$;

8) $y=\begin{cases} 2x-1 & \text{при } x\leqslant 1, \\ \ln x & \text{при } x>1 \end{cases}$ в точках $x=0$, $x=2$.

381. Вычислите приближенно значение функции:

1) $f(x)=x^5+2x^4-x^3-1$ в точке $x=1{,}01$;

2) $f(x)=(x-1)^2(x-2)^4(x-3)$ в точке $x=2{,}99$;

3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$ в точке $x=3{,}032$;

4) $f(x)=e^{\sqrt{x-2}}$ в точке $x=3{,}97$;

5) $f(x)=x\ln(x-2)$ в точке $x=3{,}012$;

6) $f(x)=\sin 2x$ в точке $x=0{,}015$.

382. Вычислите приближенно:

1) $1{,}025^{10}$; 2) $2{,}987^4$; 3) $\sqrt[3]{0{,}95}$; 4) $\sqrt[5]{32{,}02}$;
5) $\sqrt{3621}$; 6) $\sqrt{7741}$; 7) $\sin 179^\circ$; 8) $\sin 12'$;
9) $\operatorname{tg} 46^\circ$; 10) $\cos^2 44^\circ$; 11) $\ln 0{,}98$; 12) $\ln(1{,}003e)$;
13) $\ln(1{,}05^5)$; 14) $10^{3\lg 2{,}994}$; 15) $e^{0{,}07}$; 16) $e^{-0{,}005}$;

17) $\sqrt{e^{0,1}}$; 18) $e^{1,015} \cdot e^{-0,945}$; 19) arctg 1,032.

383. На сколько приближенно изменится значение степени 2^5, если основание: 1) увеличится на 0,003; 2) уменьшится на 0,003?

384. Тело движется прямолинейно по закону $s=10t+18t^2-2t^3$, где s — координата тела, м; t — время, с. Вычислите приближенно: 1) путь, пройденный телом за промежуток времени [1; 1,009]; 2) изменение скорости тела за этот промежуток времени.

385. Сторона квадратного листа жести, равная 15 см, после нагревания увеличилась на 0,001 см. Вычислите приближенно, на сколько изменилась площадь этого листа.

386. Требуется изготовить квадратную пластинку со стороной $x_0=10$ см. В каких пределах допустимо изменить сторону пластинки, чтобы ее площадь отличалась от проектной не более чем на $\pm 0,01$ см^2?

387. Боковую поверхность стального цилиндра с диаметром основания 20 см и высотой 15 см отшлифовали, после чего диаметр стал равен 19,95 см. На сколько приближенно изменилась масса цилиндра, если плотность стали равна 7,80 г/см^3?

388. Угол 30° определен с точностью до 1°. Какова граница абсолютной погрешности при вычислении косинуса этого угла?

389. Какова граница абсолютной погрешности вычисления tg φ, если $\varphi=60° \pm 1°$?

390*. Докажите справедливость следующих приближенных формул:

1) $e^x \approx 1+x$; 2) $\sin x \approx x$; 3) $\operatorname{tg} x \approx x$;

4) $\ln(1+x) \approx x$; 5) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{x}{n}$.

§ 10. Исследование функции и построение ее графика с помощью производной

34. Возрастание и убывание функции. Точки экстремума. С помощью производной можно находить промежутки возрастания и убывания функции. Для этого рекомендуется:

1) Найти область определения функции, если она не указана.

2) Найти производную и критические точки функции, т. е. точки из области определения функции,

в которых ее производная равна нулю или не существует. Критическими точками область определения функции разбивается на интервалы, на каждом из которых производная сохраняет свой знак.

3) Установить знак производной на каждом из найденных интервалов. Если на рассматриваемом интервале производная функции положительна (отрицательна), то на этом интервале функция возрастает (убывает).

Пример 1. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$y=\frac{x^2}{2}-6\ln(x-1).$$

□ Функция определена и дифференцируема на интервале $(1;\ +\infty)$. Найдем ее производную:

$$y'=x-\frac{6}{x-1}=\frac{x^2-x-6}{x-1}=\frac{(x+2)(x-3)}{x-1}.$$

Уравнение $\frac{(x+2)(x-3)}{x-1}=0$ имеет два корня: $x_1=-2$ и $x_2=3$. Однако критической точкой функции будет только $x_2=3$, так как первая не принадлежит области определения функции. Критическая точка $x_2=3$ разбивает область определения функции на два интервала $(1;\ 3)$ и $(3;\ +\infty)$, на каждом из которых производная сохраняет свой знак. Так как $y'(2)=-4<0$ и $y'(4)=2>0$, то производная отрицательна на $(1;\ 3)$ и положительна на $(3;\ +\infty)$. Следовательно, функция убывает на интервале $(1;\ 3)$ и возрастает на $(3;\ +\infty)$. ■

Пример 2. Доказать, что уравнение

$$\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}+x=1$$

имеет единственное решение.

□ Функция $f(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}+x-1$ непрерывна в своей области определения и $f(0)=-1<0$, $f(2)=\ln 3>0$. Поэтому согласно свойству 3 непрерывных функций, на промежутке $(0;\ 2)$ существует по крайней мере одна точка x_0 такая, что $f(x_0)=0$. Следовательно, $x=x_0$ является решением заданного уравнения. А так как функция $y=f(x)$ возрастающая $\left(f'(x)=1+\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}>0 \text{ при } x>-1\right)$, то решение единственно. ■

Точка x_0 называется *точкой максимума (минимума)* функции $y=f(x)$, если для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$). Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*.

Для нахождения точек экстремума функции надо:

1) Найти производную и критические точки функции.

2) Исследовать знак производной в некоторой окрестности каждой критической точки. Если функция непрерывна в критической точке x_0, а ее производная меняет знак при переходе через x_0, то x_0 — точка экстремума функции. При этом x_0 — точка максимума, если знак меняется с плюса на минус, и минимума, если знак меняется с минуса на плюс. Если же знак производной сохраняется при переходе через рассматриваемую точку, то функция не имеет экстремума в этой точке.

Иногда для нахождения точек экстремума удобно пользоваться следующим правилом.

Если в некоторой точке x_0 первая производная функции $y=f(x)$ равна нулю, а вторая производная отлична от нуля, то в этой точке функция имеет экстремум, а именно: максимум, если $f''(x_0)<0$, и минимум, если $f''(x_0)>0$.

Пример 3. Найти точки экстремума функции $y=x(x+1)^3$.

□ *Способ* I. Функция определена и дифференцируема на $(-\infty; +\infty)$. Найдем ее производную: $y'=(x+1)^2(4x+1)$. Производная равна нулю в точках $x=-1$ и $x=-1/4$, т. е. это критические точки функции. Проверим, меняет ли производная знак при переходе через эти точки. На интервалах $(-\infty; -1)$, $(-1; -1/4)$ производная отрицательна, на $(-1/4; +\infty)$ положительна. Следовательно, $x=-1/4$ — точка минимума, а в точке $x=-1$ экстремума нет.

Способ II. Найдем вторую производную: $y''=6(x+1)(2x+1)$. Так как $y''(-1/4)=9/4>0$, то $x=-1/4$ — точка минимума; $y''(-1)=0$, поэтому с помощью второй производной установить наличие экстремума в точке $x=-1$ невозможно. ■

391. На рис. 48 изображен график функции $y=f(x)$. Укажите: 1) интервалы, на которых производная данной функции положительна; 2) интервалы, на которых производная данной функции отрицательна; 3) точки,

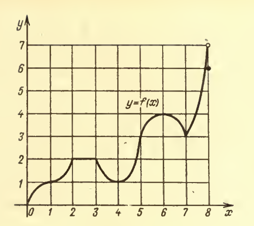


Рис. 48

в которых производная равна нулю; 4) точки, в которых производная не существует; 5) точки максимума функции; 6) точки минимума функции.

392. На рис. 49 изображен график производной некоторой функции $y=f(x)$. Укажите: 1) промежутки, на которых функция $y=f(x)$ постоянна; 2) промежутки,

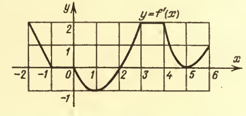


Рис. 49

на которых функция $y=f(x)$ линейна; 3) интервалы возрастания и убывания функции $y=f(x)$; 4) точки максимума и минимума функции $y=f(x)$.

393. Докажите, что функция $y=f(x)$ возрастающая:

1) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+7x+1$; 2) $f(x)=2x^3-3x^2+6x-1$;

3) $f(x)=\sin x+2x+1$; 4) $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+3x^2$.

394. Найдите интервалы возрастания (убывания) и точки экстремума функции:

1) $y=15-x^2-2x$; 2) $y=4x^3-9x^2+6x$;

3) $y=2x^3-6x^2-18x+7$; 4) $y=3x^4+16x^3+18x^2$;

5) $y=\frac{x^4}{4}-x+5$; 6) $y=x^5-5x-4$;

7) $y=3x^4-4x^3-6x^2+12x$; 8) $y=e^{x(x-1)}$;

9) $y=e^{5x}-5x+1$; 10) $y=e^x\cdot\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant\pi$;

11) $y=\frac{x-1}{x+1}$; 12) $y=x+\frac{1}{x}$;

13) $y=x-\sqrt{3-x}$; 14) $y=\sqrt{1-x^2}$;

15) $y=\sqrt{x^2-1}$; 16) $y=\sqrt{x^2-x+2}$;

17) $y=x(\ln x-2)$; 18) $y=x\ln^2 x+x+4$.

395. При каких значениях a функция $y=\frac{x^3}{3}+ax^2+x$: 1) возрастает на интервале $(-\infty;\ +\infty)$; 2) убывает на $(-\infty;\ +\infty)$?

396. При каком значении a функция $y=a\ln x+x^2-3x$ имеет экстремум в точке $x=1$? Будет ли $x=1$ точкой максимума или минимума в этом случае?

397. Сколько корней имеет уравнение:

1) $x^5+x^3+2=0$; 2) $x^3-x^2+3x+5=0$;

3) $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x-2}=2$; 4) $\cos x=x+\frac{x^3}{6}+1$?

35. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. График дифференцируемой функции называется *выпуклым вверх (вниз)* на некотором интервале, если в пределах указанного интервала он лежит не выше (не ниже) любой своей касательной.

Для нахождения интервалов выпуклости графика функции надо:

1) Найти область определения функции, если она не указана.

2) Найти вторую производную функции и точки, в которых она равна нулю или не существует.

3) Установить знак второй производной в каждом из интервалов, на которые разбивается область определения функции найденными точками.

Если в рассматриваемом интервале вторая производная положительна, то на этом интервале график

функции является выпуклым вниз, если же вторая производная отрицательна, то выпуклым вверх.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0. Точка $A(x_0; f(x_0))$ называется *точкой перегиба* графика функции, если при переходе через нее кривая меняет направление выпуклости.

Для нахождения точек перегиба графика нужно:

1) Найти все точки из области определения функции, в которых вторая производная обращается в нуль или не существует.

2) Исследовать знак второй производной в некоторой окрестности каждой из этих точек. Если функция непрерывна в точке x_0, а ее вторая производная меняет знак при переходе через эту точку, то x_0 является абсциссой точки перегиба графика данной функции.

Пример 1. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $y=x^4-6x^2+5$.

□ Находим первую и вторую производные функции:

$$y'=4x^3-12x; \quad y''=12x^2-12=12(x-1)(x+1).$$

Вторая производная всюду существует и обращается в нуль в точках $x=1$, $x=-1$. Область определения функции разбивается этими точками на три интервала: $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$, в каждом из которых вторая производная сохраняет свой знак: $f''(x)>0$ при $|x|>1$, $f''(x)<0$ при $|x|<1$. Следовательно, на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ график функции выпуклый вниз, а на интервале $(-1; 1)$ выпуклый вверх. Точки $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$ — точки перегиба графика. ■

398. На рис. 48 изображен график функции $y=f(x)$. Укажите: 1) промежутки, на которых вторая производная данной функции положительна, отрицательна, равна нулю; 2) точки перегиба графика функции.

399. Найдите интервалы выпуклости вверх (вниз) и точки перегиба графика функции:

1) $y=x^3-10x+1$; 2) $y=2x^3-6x^2-18x+7$;

3) $y=(x-1)(x-2)(x-3)$; 4) $y=x+36x^2-2x^3-x^4$;

5) $y=(x-1)^4(3x+7)$; 6) $y=\frac{x}{1+x^2}$; 7) $y=\frac{1}{x^2-x+1}$;

8) $y=\frac{x^2+4}{x}$; 9) $y=x+\sqrt{x}$; 10) $y=e^{2x}-4e^x+2$;

11) $y=x^2\ln x$; 12) $y=\ln x+\frac{1}{x}$.

400. При каких значениях a кривая $y=x^4+2ax^3+6x^2+1$ выпукла вниз на интервале $(-\infty; +\infty)$?

401. Постройте график какой-либо функции $y=g(x)$, заданной на $(-\infty; +\infty)$, если известно, что:

1) точка M (1; 1) является его точкой перегиба и $g'(1)=0$;

2) точка M (1; 1) является его точкой перегиба и $g'(1)=1$;

3) M_1 (0; 0) и M_2 (1; 1) — его точки перегиба.

402. Постройте график какой-либо функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0, если:

1) $f(x_0)=0$, $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$;

2) $f(x_0)=0$, $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$;

3) $f(x_0)=0$, $f'(x_0)=0$, $f''(x)>0$ при $x<x_0$ и $f''(x)<0$ при $x>x_0$;

4) $f(x_0)=0$, $f'(x_0)=1$, $f''(x)<0$ при $x<x_0$ и $f''(x)>0$ при $x>x_0$.

403. По графику функции, изображенному на: 1) рис. 50; 2) рис. 51, постройте эскиз графика ее производной.

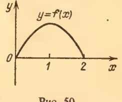


Рис. 50

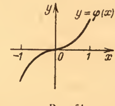


Рис. 51

36. Построение графиков функций. Исследование функции и построение ее графика целесообразно проводить по следующей схеме.

1) Найти область определения функции, если она не указана.

2) Выяснить, будет ли функция четной или нечетной.

3) Выяснить, будет ли функция периодической.

4) Найти точки пересечения графика функции с осями координат и промежутки знакопостоянства функции (если это не приводит к уравнениям, методы решения которых неизвестны).

5) Исследовать функцию на непрерывность; изучить поведение функции в окрестности точек разрыва, если они существуют.

6) Найти, если это позволяет область определения, предел функции на бесконечности.

7) Найти интервалы возрастания и убывания функции, ее точки экстремума; вычислить значения функции в точках максимума и минимума.

8) На основании полученных результатов построить эскиз графика функции.

9) Для уточнения графика, если это нужно, найти промежутки его выпуклости вверх (вниз) и точки перегиба.

Пример 1. Построить график функции

$$f(x)=16x(x+1)^3.$$

□ 1) Функция определена на $(-\infty;\ +\infty)$.

2) Она не является ни четной, ни нечетной.

3) Функция непериодическая.

4) Точки пересечения с осями координат $(0;\ 0)$; $(-1;\ 0)$. Функция принимает положительные значения на интервалах $(-\infty;\ -1)$, $(0;\ +\infty)$; отрицательные — на интервале $(-1,\ 0)$.

5) Функция непрерывна в области определения.

6) При $x\to\infty$ $y=f(x)$ принимает как угодно большие по модулю значения.

7) Найдем ее производную $f'(x)=16(x+1)^2(4x+1)$. Критические точки функции $x_1=-1$, $x_2=-1/4$. Функция убывает на интервале $(-\infty;\ -1/4)$ и возрастает на $(-1/4;\ +\infty)$. Точка $x=-1/4$ — ее точка минимума. Значение функции в точке минимума равно $f(-1/4)=-27/16$.

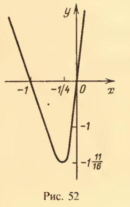


Рис. 52

8) Построим эскиз графика функции (рис. 52).

9) Уточним эскиз графика с помощью второй производной: $f''(x)=96(x+1)(2x+1)$. Она обращается в нуль в точках $x_1=-1$, $x_2=-1/2$. На интервалах $(-\infty;\ -1)$ и $(-1/2;\ +\infty)$ график функции выпуклый вниз; на интервале $(-1;\ -1/2)$ — выпуклый вверх. Точки $(-1;\ 0)$, $(-1/2;\ -1)$ — точки перегиба графика функции.

10) Результаты исследований представим в виде следующей таблицы:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$	$-1/2$	$\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$	$-1/4$	$\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$
$f'(x)$	−	0	−		−	0	+
$f''(x)$	+	0	−	0	+		+
$f(x)$	↘	$(-1; 0)$ точка перегиба графика	↘	$\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$ точка перегиба графика	↘	точка минимума	↗

Используя полученные результаты, строим график функции (рис. 53). ■

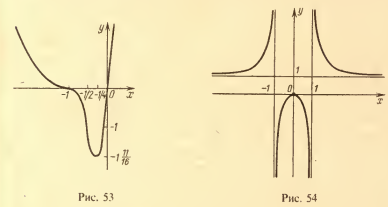


Рис. 53

Рис. 54

Пример 2. Построить график функции $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$.

◻ 1) Область определения функции — вся числовая прямая, кроме $x_1=-1$, $x_2=1$.

2) Функция четная, так как $f(-x)=f(x)$. Следовательно, график функции симметричен относительно оси ординат. Поэтому для построения графика достаточно исследовать функцию на $[0; +\infty)$.

3) Функция непериодическая.

4) Точка (0; 0) — единственная точка пересечения графика с осями координат. $f(x)>0$ на интервалах $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$; $f(x)\leqslant 0$ на интервале $(-1; 1)$.

5) Функция непрерывна в своей области определения. Точки $x=-1$, $x=1$ — ее точки разрыва. При $x\to1$ функция принимает сколь угодно большие по модулю значения, причем справа от точки $x=1$ положительные, слева — отрицательные.

6) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=1$.

7) Найдем производную: $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$. Так как на $(0;\,1)$ и $(1;\,+\infty)$ производная отрицательна, то функция убывает на этих интервалах.

Результаты исследований заносим в таблицу и на основании их строим график функции (рис. 54). ■

Постройте графики следующих функций (404—409):

404. 1) $y=4x^3+15x^2+12x+1$;
2) $y=-x^3+3x^2+9x-12$;
3) $y=16x^4+15x^2-1$; 4) $y=x^2(2-x)^2$;
5) $y=x^5-3x+1$; 6) $y=\dfrac{x^5}{5}-4x^2$;
7) $y=\dfrac{1}{2}(x+2)^2(x-1)^3$; 8) $y=5(x^2-1)^3$.

405. 1) $y=1+\dfrac{2x}{1+x^2}$; 2) $y=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$; 3) $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

406. 1) $y=\dfrac{16}{x^2}+x^2$; 2) $y=\dfrac{1}{x(x-1)}$; 3) $y=\dfrac{3}{x^2-x-6}$.

407. 1) $y=x^2-\sqrt{2x}$; 2) $y=(x-3)\sqrt{x}$;
3) $y=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$.

408. 1) $y=\ln(1+x^2)$; 2) $y=\ln(x^2-1)$;
3) $y=e^{-x^2}$; 4) $y=\sqrt{x}e^x$; 5) $y=\sqrt{\sin x}$; 6) $y=\dfrac{1}{\cos x}$.

409. Сколько корней имеет уравнение:
1) $\sqrt{1+x^4}=\dfrac{1}{x}$; 2) $\dfrac{1}{1+x^2}=x^2-x$;
3) $\ln(1+x^2)=1-x^2$?

37. Наибольшее и наименьшее значения функции. Значение функции $y=f(x)$ в некоторой точке x_0 множества X называется *наибольшим* (*наименьшим*) *значением функции на этом множестве*, если для каждого $x\in X$ выполняется неравенство

$$f(x)\leqslant f(x_0)\qquad (f(x)\geqslant f(x_0)).$$

Непрерывная на отрезке функция всегда имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции в этих критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Если на некотором промежутке непрерывная функция $y=f(x)$ имеет единственную критическую точку x_0 и x_0 — точка максимума (минимума), то $f(x_0)$ будет наибольшим (наименьшим) значением функции на этом промежутке.

Пример 1. Выяснить, существуют ли наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^2+\frac{16}{x^2}$ на промежутке: 1) $[1; 10]$; 2) $(0; +\infty)$. Если существуют, найти их.

□ 1) Функция непрерывна на отрезке $[1; 10]$, поэтому она имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. Найдем производную функции $y'=\frac{2(x^4-16)}{x^3}$. Критическими точками функции будут точки $x=2$, $x=-2$. Однако только одна из них, $x=2$, принадлежит отрезку $[1; 10]$. Следовательно, наибольшее и наименьшее значения данной функции находятся среди значений $f(1)=17$; $f(2)=8$; $f(10)=100{,}16$. Наибольшее значение $f(10)=100{,}16$ функция принимает на правом конце отрезка, наименьшее $f(2)=8$ — в своей точке минимума.

2) В случае бесконечного промежутка заранее нельзя сказать, имеет ли функция наибольшее и наименьшее значения. На интервале $(0; +\infty)$ находится единственная критическая точка функции $x=2$. Так как переходя через эту точку производная меняет знак с минуса на плюс, то $x=2$ — точка минимума функции, а следовательно, $f(2)=8$ — наименьшее значение функции на $(0; +\infty)$. Наибольшего значения на этом интервале функция не имеет. ■

Пример 2. Доказать неравенство $x^2 \ln x \geqslant -\frac{1}{2e}$.

□ Найдем наименьшее значение функции $f(x)=x^2 \ln x$ на $(0; +\infty)$. Так как $f'(x)=2x\ln x+x$, то единственной критической точкой, попадающей

в заданный промежуток, будет точка $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$. Это точка минимума, поэтому в ней функция принимает наименьшее значение $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$. Следовательно, $f(x)\geqslant-\frac{1}{2e}$, т. е. $x^2\ln x\geqslant-\frac{1}{2e}$. ■

410. На рис. 48 изображен график функции $y=f(x)$. Имеет ли эта функция наибольшее и наименьшее значения на промежутке: 1) [0; 1]; 2) (1; 2); 3) [2; 4]; 4) (2; 4); 5) (2; 5); 6) [5; 8]? Если имеет, укажите их.

411. Постройте график какой-либо функции, заданной на отрезке $[-1; 1]$ и обладающей следующими свойствами: 1) наибольшее и наименьшее значения функция принимает на концах отрезка; 2) наибольшее и наименьшее значения функция принимает в точках экстремума; 3) наибольшее и наименьшее значения функции совпадают; 4) функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений; 5) функция имеет один минимум, два максимума и не имеет наименьшего значения.

412. Выясните, существуют ли наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на указанном промежутке, и если существуют, найдите их:

1) $f(x)=2x-1$, $[0; 1]$; 2) $f(x)=2x-1$, $(0; 1]$;
3) $f(x)=x^2-6x+8$, $[1; 4]$; 4) $f(x)=x^2-6x+8$, $(1; 4)$;
5) $f(x)=x^2-6x+8$, $(1; +\infty)$;
6) $f(x)=3x^3-4x+8$, $[-1; 1]$;
7) $f(x)=3x^4+4x^3+1$, $[0; 1]$;
8) $f(x)=3x^4+4x^3+1$, $[-2; 1]$;
9) $f(x)=3x^4+4x^3+1$, $(-\infty; +\infty)$;
10) $f(x)=\sin x+2x$, $[-\pi; \pi]$;
11) $f(x)=\sin^2 x$, $[\pi/4; 2\pi/3]$;
12) $f(x)=\sin x-x-\frac{x^3}{3}$, $[0; \pi]$;
13) $f(x)=\frac{1}{x}+x$, $[0{,}1; 10]$; 14) $f(x)=\frac{1}{x}+x$, $(0; +\infty)$;
15) $f(x)=\frac{x}{x-x^2-1}$, $[-2; 2]$; 16) $f(x)=x\ln x-x$, $\left[\frac{1}{e}; e\right]$;
17) $f(x)=xe^{x+1}$, $[-2; 0]$; 18) $f(x)=xe^{x+1}$, $[-2; +\infty)$.

413. Докажите справедливость неравенств:

1) $0 \leqslant x^3-3x+2 \leqslant 20$ при $-1 \leqslant x \leqslant 3$;
2) $x^8-8x+7 \geqslant 0$;
3) $1+x \leqslant e^x$; 4) $|x^5-5x| \leqslant 4$ при $|x| \leqslant 1$;
5) $\sin x \leqslant x$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$; 6) $\sin x \leqslant x$ при $x \geqslant 0$.

414. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x=-\frac{t^3}{3}+2t^2+5t-1,$$

где t — время, с; $|x|$ — расстояние от точки до начала координат, м. Найдите: 1) наибольшее и наименьшее отклонения точки от начала координат за первую секунду движения; 2) наибольшую и наименьшую мгновенные скорости точки за первые две секунды движения, за первые пять секунд движения, 3) наибольшее и наименьшее ускорения точки за вторую секунду движения.

415. Какое положительное число, будучи сложенным с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?

416. Окно имеет форму прямоугольника, периметр которого равен 8 м. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

417. Число 162 представьте в виде суммы трех положительных слагаемых так, чтобы одно из них было в 5 раз больше другого, а произведение этих трех чисел было наибольшим.

418. В прямоугольный треугольник с катетами, равными 2 см и 4 см, впишите прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными катетам треугольника.

419. Докажите, что на изготовление цилиндрической бочки заданной вместимости пойдет наименьшее количество материала в том случае, если ее высота равна радиусу основания.

420. Населенный пункт A расположен на расстоянии 3 км от автомагистрали и 5 км от города B, через который проходит эта магистраль. Под каким углом к автомагистрали нужно построить подъездную дорогу, чтобы затраты времени на перевозку грузов из A в B были наименьшими, если допустимая скорость движения автомобилей по магистрали 90 км/ч, а по подъездной дороге 45 км/ч?

421. Составляется электрическая цепь из двух параллельно соединенных резисторов. При каком

соотношении между сопротивлениями этих резисторов сопротивление цепи максимально, если при последовательном соединении оно равно R Ом?

422. Разрежьте отрезок длиной 18 см на две части так, чтобы, взяв их за катеты, получить прямоугольный треугольник с наименьшей гипотенузой.

423. Через точку $P(4; 1)$ проведите прямую, не проходящую через начало координат, так, чтобы: 1) сумма длин отрезков, отсекаемых ею на положительных координатных полуосях, была наименьшей; 2) прямоугольный треугольник, образованный этой прямой и осями координат, имел наименьшую площадь.

Глава 5

ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 11. Неопределенный интеграл

38. Первообразная и ее свойства. Функция $y=F(x)$ называется *первообразной для функции* $y=f(x)$ *на некотором промежутке*, если $F'(x)=f(x)$ для всех x из этого промежутка.

Если $y=F(x)$ первообразная для функции $y=f(x)$ на некотором промежутке, то существует бесконечно много первообразных для $y=f(x)$ на этом промежутке и все они имеют вид $y=F(x)+C$, где C — произвольная постоянная. Геометрически это означает, что графики всех первообразных можно получить из графика какой-нибудь одной из них сдвигом этого графика вдоль оси y. Выбором постоянной C можно добиться того, чтобы график первообразной проходил через заданную точку.

Пример 1. Для функции $y=1/\sqrt{x}$ на $(0; +\infty)$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(9; -2)$.

□ Так как $(2\sqrt{x})'=1/\sqrt{x}$ на $(0; +\infty)$, то функция $y=2\sqrt{x}$ является первообразной для функции $y=1/\sqrt{x}$ на этом промежутке. Тогда функции вида $y=2\sqrt{x}+C$ также являются первообразными для данной функции. Выберем из этого семейства ту функцию, график которой проходит через точку $M(9; -2)$. Постоянная C должна удовлетворять уравнению $2\sqrt{9}+C=-2$. Отсюда $C=-8$. Следовательно, $y=2\sqrt{x}-8$ — искомая первообразная. ■

424. Докажите, что функция $y=F(x)$ является первообразной для функции $y=f(x)$ на $(0; +\infty)$, если:

1) $F(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+x$, $f(x)=-\frac{1}{x\sqrt{x}}+1$;

2) $F(x)=\ln(x^2+x)$, $f(x)=\frac{2x+1}{x(x+1)}$;

3) $F(x)=\frac{1}{x^2}-e^{1/x}$, $f(x)=\frac{xe^{1/x}-2}{x^3}$.

425. Является ли первая из указанных функций первообразной для второй на интервале $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$:

1) $F(x)=\frac{x^4}{2}+3x+1, \quad f(x)=2x^3+3;$

2) $F(\varphi)=\cos 5\varphi+\varphi, \quad f(\varphi)=-5\sin 5\varphi+1;$

3) $F(x)=\frac{1}{x-1}, \quad f(x)=-\frac{1}{(x-1)^2};$

4) $F(u)=\frac{1}{2}\ln(1+u^2), \quad f(u)=\frac{u}{u^2+1};$

5) $F(x)=\ln(2x-1), \quad f(x)=\frac{2}{2x-1};$

6) $F(t)=e^{1/t}, \quad f(t)=-\frac{e^{1/t}}{t^2}$?

426. Для функции $y=f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку M_0, если

1) $f(x)=0, \quad M_0(1/2; 2);$
2) $f(x)=2, \quad M_0(0{,}1; 10);$
3) $f(x)=1/x, \quad M_0(e^3; 3);$
4) $f(x)=\sqrt{x}, \quad M_0(1; 1);$
5) $f(x)=\left(\frac{1}{4}(x+1)\right)^3, \quad M_0(0; 0);$
6) $f(x)=\sin\frac{x+\pi}{4}, \quad M_0(-\pi; 5);$
7) $f(x)=\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}, \quad M_0(1; 3/2);$
8) $f(x)=e^x+\sin x, \quad M_0(0; \sqrt{2}).$

427. Найдите уравнение линии, проходящей через точку $A(2; 1)$, если угловой коэффициент касательной к ней в каждой точке равен: 1) нулю; 2) единице; 3) абсциссе этой точки; 4) квадрату абсциссы этой точки.

428. Скорость прямолинейно движущейся точки меняется по закону $v=3t^2+1$, где v — скорость, м/с; t — время, с. Найдите зависимость координаты точки от времени, если в момент $t=0$: 1) точка находилась в начале координат; 2) координата точки равнялась 0,5 м.

429. После удара о поверхность земли мяч движется вертикально вверх с начальной скоростью $v_0=15$ м/с. Найдите: 1) зависимость скорости и высоты подъема мяча от времени; 2) скорость и высоту подъема мяча в момент времени $t=2$ с.

430. Диск вращается в жидкости с угловым ускорением $\varepsilon=-0{,}08e^{-0{,}04t}$, где ε — угловое ускорение, рад/с^2; t — время, с. Найдите зависимость угловой скорости диска от времени, если при $t=0$ его угловая скорость $\omega=2{,}5$ рад/с.

39. Неопределенный интеграл, его основные свойства. Совокупность первообразных $y=F(x)+C$ для функции $y=f(x)$ на некотором промежутке называется *неопределенным интегралом функции на этом промежутке* и обозначается символом $\int f(x)dx$, т. е. $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Нахождение неопределенного интеграла называют *интегрированием функции.*

Справедливы следующие формулы интегрирования (*табличные интегралы*):

1) $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad \alpha\neq-1;$ 2) $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C;$

3) $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C,$ в частности $\int e^{x}dx=e^{x}+C;$

4) $\int\cos x\,dx=\sin x+C;$ 5) $\int\sin x\,dx=-\cos x+C;$

6) $\int\frac{dx}{\cos^{2}x}=\operatorname{tg}x+C;$ 7) $\int\frac{dx}{\sin^{2}x}=-\operatorname{ctg}x+C;$

8) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\arcsin x+C;$ 9) $\int\frac{dx}{1+x^{2}}=\operatorname{arctg}x+C.$

Чтобы найти неопределенный интеграл, достаточно свести его к табличным. Это часто удается сделать путем преобразования подынтегрального выражения и применения *основных правил интегрирования*:

1) $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx,$ где k — постоянная;

2) $\int(f(x)\pm g(x))\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx;$

3) если $\int f(x)\,dx=F(x)+C,$ то $\int f(kx+b)\,dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C,$ где k и b — постоянные, $k\neq0$.

Пример 1. Найти $\int\left(5\cos x-3x^{2}+\frac{1}{x}\right)dx.$

□ Применяя последовательно второе и первое правила интегрирования, представим интеграл в виде суммы табличных интегралов:

$$\int\left(5\cos x-3x^{2}+\frac{1}{x}\right)dx=5\int\cos x\,dx-3\int x^{2}\,dx+\int\frac{dx}{x}=$$

$$=5\sin x-x^{3}+\ln|x|+C. \blacksquare$$

Пример 2. Найти $\int \frac{2x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\,dx$.

□ Преобразовав подынтегральное выражение, а затем последовательно применив второе и первое правила интегрирования, получим

$$\int \frac{2x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\,dx=\int (2x^{1/2}+1+x^{-1/2})\,dx=$$

$$=2\int x^{1/2}\,dx+\int dx+\int x^{-1/2}\,dx=$$

$$=\frac{4}{3}x^{3/2}+x+2x^{1/2}+C=\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x+2\sqrt{x}+C. \ ■$$

Пример 3. Найти $\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx$.

$$□ \int \mathrm{ctg}^2 x\,dx=\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx=\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx=$$

$$=\int \left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=\int \frac{dx}{\sin^2 x}-\int dx=-\mathrm{ctg}\,x-x+C. \ ■$$

Пример 4. Найти $\int e^{3x+2}\,dx$.

□ Так как $\int e^x\,dx=e^x+C$, то согласно правилу 3 $\int e^{3x+2}\,dx=\frac{1}{3}e^{3x+2}+C$. ■

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{x^2-4x+6}$.

□ Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{x^2-4x+6}=\frac{1}{(x-2)^2+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x-\sqrt{2}\right)^2}.$$

Так как $\int \frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arctg}\,x+C$, то, применив последовательно первое и третье правила интегрирования, получим

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+6}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x-\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{2}}+C. \ ■$$

431. Найдите:

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$; 2) $\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx$;

3) $\int \frac{dx}{x}$ при $x<0$; 4) $\int 3\,dx$.

В задачах 432—434 найдите интеграл.

432. 1) $\int 7\sqrt[4]{x^3}\,dx$; 2) $\int \left(\frac{x^2}{3}+x+4\right)dx$;

3) $\int \left(1+\frac{1}{5t}+\frac{3}{2t^2}\right)dt$; 4) $\int x\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)dx$;

5) $\int (\sin\varphi+3\cos\varphi)\,d\varphi$; 6) $\int \left(\frac{\sin x}{2}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$;

7) $\int \frac{5^t+t}{\sqrt{5}}\,dt$; 8) $\int \frac{y^6+8y^4+1}{y}\,dy$; 9) $\int \frac{x^3+2x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\,dx$;

10) $\int 2^x\cdot 3^x\,dx$; 11) $\int \frac{24^x-2^x}{4^x}\,dx$; 12) $\int \frac{3e^{2x}+e^x\cos x}{e^x}\,dx$;

13) $\int (x+1)^2(3x-4)\,dx$; 14) $\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)\,dx$;

15) $\int \left(\frac{2u-1}{3u}\right)^2 du$; 16) $\int \frac{x^3-8}{2-x}\,dx$; 17) $\int \frac{e^{2x}-4}{6e^x-12}\,dx$;

18) $\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{4\sqrt{x}}\,dx$; 19) $\int \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\,d\theta$;

20) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx$;

21) $\int \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$; 22) $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$; 23) $\int \sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}\,dt$;

24) $\int \frac{dx}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}$; 25) $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}\,dx$;

26) $\int \frac{d\psi}{1+\cos 2\psi}$; 27) $\int \frac{\cos^2 x+2\cos x-3}{3+\cos x}\,dx$.

433. 1) $\int (x+4)^8\,dx$; 2) $\int \frac{2\,dx}{x+1}$; 3) $\int \sqrt{t-1}\,dt$;

4) $\int \frac{dx}{4x+1}$; 5) $\int \frac{dy}{(2-5y)^{100}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x/2}}$;

7) $\int \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{3}\,d\theta$; 8) $\int \sin\frac{2x-1}{4}\,dx$; 9) $\int 2e^{(x-1)/2}\,dx$;

10) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$; 11) $\int \frac{du}{4+u^2}$; 12) $\int \frac{dx}{7\cos^2(3-x)}$;

13) $\int \frac{dy}{\sqrt{4-9y^2}}$; 14) $\int \left(1+e^{\sqrt{2}x+1}\right)dx$.

434. 1) $\int \sin 3\varphi \cdot \cos 3\varphi\,d\varphi$; 2) $\int (\cos 2x+\sin 2x)^2\,dx$;
3) $\int \sin x \cdot \cos 7x\,dx$; 4) $\int \cos(x/2)\cdot\sin(x/3)\,dx$;
5)* $\int \cos^4 x\,dx$; 6)* $\int \sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\,dx$.

435. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку A (0; 7), если угловой коэффициент касательной к ней в точке с абсциссой x равен: 1) $3-\frac{x}{5}$; 2) e^x; 3) $\frac{1}{2x+1}$.

436. На рис. 55 изображены графики скоростей некоторых прямолинейных движений. Найдите для каждого случая закон движения тела, если в момент времени $t=1$ с оно находилось в начале координат.

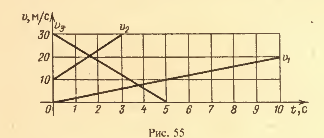


Рис. 55

437. Зависимость скорости прямолинейно движущейся точки от времени выражается формулой $v=\sin\frac{\pi t}{2}$, где v — скорость, м/с; t — время, с. Найдите координату точки в начальный момент времени ($t=0$), если в момент времени $t=1$ она равнялась 1 м.

438. Найдите закон движения тела массой 10 кг под действием постоянной силы $F=6$ Н, если в момент времени $t=0$ тело покоилось в начале координат.

439. Ускорение прямолинейно движущейся точки меняется по закону $a=1{,}5\,t$, где a — ускорение, м/с^2; t — время, с. Известно, что к концу первой секунды тело прошло 6 м и скорость его была равна 3,75 м/с. Найдите: 1) зависимость скорости движения от времени; 2) закон движения тела.

440. Тело массой 4 кг совершает прямолинейное движение из состояния покоя под действием переменной силы, которая изменяется по закону $F=\frac{2}{\sqrt{t+1}}$, где F — сила, Н; t — время, с. Через 3 секунды после начала движения сила прекращает действовать и тело движется равномерно с набранной к этому моменту скоростью. Найдите зависимость скорости движения от времени. Постройте график этой зависимости.

441. Скорость прямолинейно движущейся точки меняется по закону $v=t^2-5t+4$, где v — скорость, м/с; t — время, с. В момент времени $t=2$ с точка имела координату $x=-1/3$. Найдите координату точки в момент: 1) $t=3$ с; 2) когда точка меняет направление движения; 3) когда ускорение равно нулю.

442. Скорость охлаждения воды в открытом резервуаре изменяется по закону $T'=0{,}03e^{-0{,}01t}$, где T' — скорость, К/с; t — время, с. Найдите температуру тела в момент времени $t=100$ с, если в начальный момент времени ($t=0$) она была равна 360 К.

40. Замена переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки). *В основе метода замены переменной лежит следующее утверждение*:

$$\text{если } \int f(x)\,dx=F(x)+C, \text{ то } \int f(u(t))\,u'(t)\,dt=F(u(t))+C.$$

Цель замены — подобрать функцию $x=u(t)$ так, чтобы, подставив ее вместо x в подынтегральное выражение $f(x)\,dx$, получить более простой интеграл $\int f(u(t))\,u'(t)\,dt$. После его нахождения необходимо вернуться к первоначальной переменной.

Пример 1. Найти $\int x\sqrt{x-3}\,dx$.

□ С целью упрощения подынтегрального выражения полагаем $x-3=t$. Отсюда $x=t+3$, $dx=dt$. Заменив всюду под интегралом x на $u(t)=t+3$, получим

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx=\int(t+3)\sqrt{t}\,dt=\int\left(t^{3/2}+3t^{1/2}\right)dt=$$
$$=\frac{2}{5}t^{5/2}+3\cdot\frac{2}{3}t^{3/2}+C=\frac{2}{5}(x-3)^{5/2}+2(x-3)^{3/2}+C. \blacksquare$$

Пример 2. Найти $\int \frac{x\,dx}{(2x+5)^3}$.

□ Положим $2x+5=t$. Отсюда

$$x=\frac{1}{2}(t-5), \quad dx=\frac{dt}{2}.$$

Подставив полученные выражения для x и dx в подынтегральное выражение, получим

$$\int \frac{x\,dx}{(2x+5)^3}=\frac{1}{4}\int \frac{(t-5)\,dt}{t^3}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{5}{t^3}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2}-\frac{5}{4}\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{4t}+\frac{5}{8t^2}+C=-\frac{4x+5}{8(2x+5)^2}+C. \ ■$$

В тех случаях, когда подынтегральное выражение имеет вид $f(u(x))\,u'(x)\,dx=f(u(x))\,du(x)$ или приводится к этому виду, целесообразно заменить $u(x)$ на t, найти полученный интеграл $\int f(t)\,dt$, а затем вернуться к переменной x с помощью соотношения $t=u(x)$.

Пример 3. Найти $\int \cos^5 x \cdot \sin x\,dx$.

□ Представив подынтегральное выражение в виде $\cos^5 x \cdot \sin x\,dx=\cos^5 x\,(-\cos x)'\,dx=-\cos^5 x\,d(\cos x)$ и выполнив замену $\cos x=t$, получаем

$$\int \cos^5 x \sin x\,dx=-\int \cos^5 x\,d(\cos x)=-\int t^5\,dt=$$

$$=-\frac{t^6}{6}+C=-\frac{\cos^6 x}{6}+C. \ ■$$

Пример 4. Найти $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

□ $\int \frac{\ln x}{x}\,dx=\int \ln x\,d(\ln x)=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{(\ln x)^2}{2}+C.$ ■

Пример 5. Найти $\int \frac{x+0{,}5}{x^2+x+3}\,dx$.

□ $$\int \frac{x+0{,}5}{x^2+x+3}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+3}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+3)}{x^2+x+3}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+3|+C. \ ■$$

В задачах 443—444 найдите следующие интегралы:

443. 1) $\int \frac{x\,dx}{x^2+9}$; 2) $\int y\sqrt{3y^2+1}\,dy$; 3) $\int x e^{-x^2}\,dx$;

4) $\int \frac{3x^2\,dx}{(1-5x^3)^3}$; 5) $\int \cos\varphi\sqrt{\sin\varphi}\,d\varphi$; 6) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx$;

7) $\int \operatorname{tg}\theta\, d\theta$; 8) $\int \frac{\operatorname{tg} x+1}{\cos^2 x}\, dx$; 9) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx$;

10) $\int 4\sin^3 x\, dx$; 11) $\int (1+e^t)^{20} e^t\, dt$; 12) $\int \frac{e^x\, dx}{2-3e^x}$;

13) $\int \frac{\sqrt{\ln y}}{y}\, dy$; 14) $\int \frac{2\ln^2 x+3}{x}\, dx$; 15) $\int \frac{\operatorname{arctg} u}{1+u^2}\, du$.

444. 1) $\int x\sqrt{2x+1}\, dx$; 2) $\int \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \sqrt{1-x}\, dx$;

3) $\int \frac{4x+3}{\sqrt[3]{3x+2}}\, dx$; 4) $\int \frac{2x\, dx}{(5-2x)^3}$; 5) $\int \frac{x^2\, dx}{x+1}$; 6)* $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{1+\sqrt{x}}$.

В задачах 445—446 найдите интегралы.

445. 1) $\int \frac{dx}{(1-{}^2/_3 x)^2}$; 2) $\int \frac{dt}{6+3t^2}$; 3) $\int \frac{dx}{x^2+10x+30}$;

4) $\int \frac{(x+5)\, dx}{x^2+10x+30}$; 5) $\int (x+2)\sqrt{5-4x-x^2}\, dx$;

6) $\int \frac{1-\cos 2x}{\sin x}\, dx$; 7) $\int \left(5^{x+1}+\frac{1}{3^x}\right) dx$;

8) $\int x\cos(x^2+1)\, dx$; 9) $\int \cos\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{2}\, dx$;

10)* $\int (\cos 2\psi-\sin^2\psi)^2\, d\psi$; 11)* $\int (\cos x-\sin x)^3\, dx$;

12)* $\int \sin^4\theta\, d\theta$; 13) $\int \cos^2(2x+1)\, dx$;

14) $\int \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$; 15) $\int \frac{-\sin y\, dy}{\sin^2 y+2\cos^2 y}$;

16) $\int (5\sin^3 x+x)\, dx$; 17) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; 18) $\int e^x \sqrt{\frac{e^x+1}{2}}\, dx$;

19) $\int \frac{dt}{t\ln t}$; 20) $\int x\sqrt[3]{1-\frac{x}{2}}\, dx$; 21) $\int \frac{4x\, dx}{(2+7x)^{3/2}}$;

22) $\int \frac{z+2}{z+1}\, dz$;

23) $\int \frac{x\, dx}{3x+2}$; 24) $\int (5+3x)^{12} dx$.

446. 1) $\int \frac{2t}{t+2}\, dt$; 2) $\int \frac{dx}{(x+2)(x-3)}$; 3) $\int \frac{du}{u(u+7)}$;

4) $\int \frac{dx}{x^2+x}$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$; 6) $\int \frac{dx}{4+x+x^2}$.

§ 12. Определенный интеграл

41. Определенный интеграл, его физический и геометрический смысл. Формула Ньютона — Лейбница. Определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $y=f(x)$ равен приращению первообразной для этой функции на указанном промежутке, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad (\textit{формула Ньютона — Лейбница}).$$

При вычислениях обычно пользуются сокращенной записью

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

□ Первообразной для функции $y=\frac{1}{\cos^2 x}$ на отрезке $[0; \pi/4]$ является функция $y=\operatorname{tg} x$. Поэтому, применив формулу Ньютона — Лейбница, получим

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x|_0^{\pi/4} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 = 1. \ ■$$

Определенный интеграл $\int\limits_{t_0}^{T} v(t)\,dt$ *есть перемещение прямолинейно движущейся со скоростью* $v(t)$ *материальной точки за промежуток времени* $[t_0; T]$.

Если $v(t) \geqslant 0$ на отрезке $[t_0; T]$, т. е. направление движения точки совпадает с направлением оси, то ее перемещение совпадает с путем, пройденным за этот промежуток времени. В этом случае определенный интеграл $\int\limits_{t_0}^{T} v(t)\,dt$ можно трактовать как путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_0; T]$. В общем случае пройденный путь равен $\int\limits_{t_0}^{T} |v(t)|\,dt$.

Пример 2. Скорость прямолинейно движущейся материальной точки меняется по закону $v=t-1$, где v — скорость, м/с; t — время, с.

Найти: 1) перемещение точки за промежуток времени $[0; 1]$; 2) путь, пройденный точкой за промежуток времени $[0; 1]$.

□ 1) Перемещение точки за указанный промежуток времени равно:

$$\int_0^1 (t-1)dt = \left(\frac{t^2}{2} - t\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -0{,}5 \text{ м.}$$

2) Очевидно, перемещение в рассмотренном примере не совпадает с пройденным путем, так как путь должен быть больше 0:

$$s = \int_0^1 |v(t)|dt = \int_0^1 |t-1|dt = \int_0^1 (1-t)dt = \left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ м.} \ ■$$

Фигура $aABb$, ограниченная графиком непрерывной неотрицательной функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью x (рис. 56), называется *криволинейной трапецией*. Ее площадь S равна

$$S = \int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$

В этом и заключается *геометрический смысл определенного интеграла*.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y=-1/x$ и прямыми $y=0$, $x=-1$, $x=-2$.

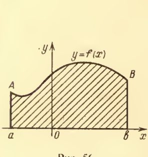


Рис. 56

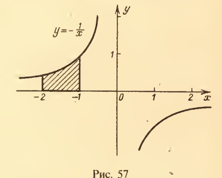


Рис. 57

□ Фигура представляет собой криволинейную трапецию (рис. 57). Поэтому, применяя формулу (1), получаем

$$S = -\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = -\ln|x|\Big|_{-2}^{-1} = -(\ln 1 - \ln 2) = \ln 2. \ ■$$

Вычислите определенные интегралы

447. 1) $\int\limits_{1/e}^{e} \frac{dx}{x}$; 2) $\int\limits_{0}^{1} t\sqrt{t}\,dt$; 3) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$;

4) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\frac{x}{2}\,dx$; 5) $\int\limits_{-2}^{0} \left(\frac{x}{2}+1\right)^3 dx$; 6) $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{(x-3)^2}$;

7) $\int\limits_{-\pi}^{3\pi} \sin\frac{x+\pi}{2}\,dx$; 8) $\int\limits_{100}^{101} \left(\frac{u-1}{\sqrt{u}+1}-\sqrt{u}+2\right)du$.

448. Какие из фигур, изображенных на рис. 58, являются криволинейными трапециями? Вычислите их площади.

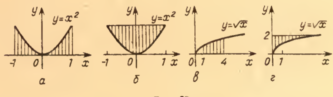


Рис. 58

449. Материальная точка движется со скоростью $v=3t^2-27$, где v — скорость, м/с; t — время, с.

Найдите: 1) перемещение точки за промежуток времени $[0; 3]$; 2) путь, пройденный точкой за 4-ю секунду движения; 3) путь, пройденный точкой за промежуток времени $[0; 3]$.

450. На рис. 59 изображен график скорости прямолинейно движущейся точки. За какой промежуток времени $[0; 1]$ или $[2; 3]$ точка прошла больший путь?

451. Скорость изменения объема газа в зависимости от температуры T равна $0{,}35T$ см³/К. На сколько изменится объем газа, если температура повысится от 300 до 350 К?

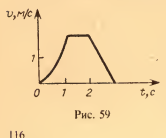


Рис. 59

452. Сила тока, пропорциональная времени, по истечении минуты достигает 1,2 А. Найдите количество электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за 30 с, считая от начала опыта.

42. Основные свойства определенного интеграла. Определенный интеграл обладает следующими свойствами:

1) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, где k — постоянная;

2) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$;

3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, где $c \in [a; b]$;

4) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$; 5) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

6) $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$, где c — некоторая точка на отрезке $[a; b]$;

7) если $f(x) \geqslant g(x)$ при всех $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx;$$

8) если $m \leqslant f(x) \leqslant M$ при всех x из промежутка $[a; b]$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Пример 1. Вычислить $\int_1^4 \left(1 + 5x + \frac{3\sqrt{x}}{2}\right) dx$.

□ Используя свойства 1), 2), представим определенный интеграл в виде суммы трех более простых интегралов, к каждому из которых применим формулу Ньютона — Лейбница:

$$\int_1^4 \left(1 + 5x + \frac{3\sqrt{x}}{2}\right) dx = \int_1^4 dx + 5\int_1^4 x\,dx + \frac{3}{2}\int_1^4 \sqrt{x}\,dx =$$

$$= x\Big|_1^4 + \frac{5}{2}x^2\Big|_1^4 + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4 =$$

$$= (4-1) + \frac{5}{2}(4^2-1) + (4^{3/2}-1) = 47{,}5. \ \blacksquare$$

Пример 2. Скорость прямолинейно движущейся материальной точки меняется по закону $v=2t-2$, где v — скорость, м/с; t — время, с. Найти путь, пройденный точкой за промежуток времени $[0; 2]$.

□ Скорость меняет знак на отрезке $[0; 2]$. Поэтому путь, пройденный точкой, равен

$$\int_0^2 |v(t)|\,dt = 2\int_0^2 |t-1|\,dt = 2\int_0^1 |t-1|\,dt + 2\int_1^2 |t-1|\,dt =$$

$$= -2\int_0^1 (t-1)\,dt + 2\int_1^2 (t-1)\,dt = -2\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\Bigg|_0^1 + 2\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= -2\left(\frac{1}{2}-1\right) + 2\left(2-2-\frac{1}{2}+1\right) = 2 \text{ м. } \blacksquare$$

Пример 3. Не вычисляя, определить, какой из интегралов больше: $\int_1^2 \ln x\,dx$ или $\int_1^2 \ln^2 x\,dx$.

□ Сравним подынтегральные функции. Так как $0 \leqslant \ln x < 1$ на отрезке $[1; 2]$, то $\ln^2 x \leqslant \ln x$ на этом отрезке. Из свойства 7) следует, что $\int_1^2 \ln x\,dx \geqslant \int_1^2 \ln^2 x\,dx$. ■

Пример 4. Доказать, что $0{,}15 < \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{4+x^2}\,dx < 1{,}2$.

□ Оценим сверху и снизу подынтегральную функцию на отрезке $[1; 4]$. Так как числитель $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{4} = 2$, а знаменатель $4+x^2 \geqslant 5$ на рассматриваемом отрезке, то $\frac{\sqrt{x}}{4+x^2} < 0{,}4$ на $[1; 4]$. Учитывая, что $\sqrt{x} \geqslant 1$ и $4+x^2 \leqslant 4+4^2 = 20$ на $[1; 4]$, получаем $\frac{\sqrt{x}}{4+x^2} > 0{,}05$. Тогда на основании свойства 8) имеем

$$0{,}15 < \int_1^4 \frac{\sqrt{x}\,dx}{4+x^2} < 1{,}2. \ \blacksquare$$

В задачах 453—454 вычислите определенный интеграл.

453. 1) $\int\limits_{-2}^{-1}\left(x+\frac{1}{3x^5}+\frac{1}{2}\right)dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1,5}\frac{x^2+2x+1}{x+1}\,dx$;

3) $\int\limits_{1}^{4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{2x}}{x}\,dx$; 4) $\int\limits_{0}^{-1}\frac{t^4-1}{1+t^2}\,dt$;

5) $\int\limits_{2}^{3}\frac{x^2+x-2}{x-1}\,dx$; 6) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{\sqrt{4+4x+x^2}}{x+2}\,dx$;

7) $\int\limits_{-4}^{-3}\frac{\sqrt{4+4x+x^2}}{x+2}\,dx$; 8) $\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\sin 3\varphi+5\cos\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi$;

9) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin\frac{\psi}{3}\cdot\cos\frac{\psi}{3}\,d\psi$; 10) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{dx}{1+\cos 2x}$;

11) $\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 t\,dt$; 12) $\int\limits_{-\pi/2}^{0}\sin 3x\cdot\cos x\,dx$;

13) $\int\limits_{0}^{\ln 3}(e^{2t}-e^{-t/2})\,dt$; 14) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{2^x-3^x}{6^x}\,dx$;

15) $\int\limits_{0}^{1}\frac{e^x+e^{-1}}{e^{x-1}}\,dx$.

454. 1) $\int\limits_{-1}^{2}f(x)\,dx$, если $f(x)=\begin{cases}x & \text{при } x\leqslant 0,\\ x^2 & \text{при } x>0;\end{cases}$

2) $\int\limits_{-1}^{1}|u|\,du$; 3) $\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}}\,d\varphi$;

4) $\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}}\,d\varphi$; 5) $\int\limits_{0}^{2\pi}|\sin 2x|\,dx$.

455. Не вычисляя интеграл, определите его знак:

1) $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$;   2) $\int_1^2 \lg x\,dx$;

3) $\int_1^2 \log_{0.1} x\,dx$;   4) $\int_1^{1.1} (x^2-3x+2)\,dx$;

5) $\int_{10}^{11} (x^2-3x+2)\,dx$;   6) $\int_0^1 (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\,dx$.

456. Не вычисляя, определите, какой из интегралов больше:

1) $\int_0^{0.9} x^{10}dx$ или $\int_0^{0.9} x^{11}dx$;

2) $\int_1^{90} x^{10}dx$ или $\int_1^{90} x^{11}dx$;

3) $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ или $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$;

4) $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx$ или $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x\,dx$;

5) $\int_0^1 2^{-x}dx$ или $\int_0^1 3^{-x}dx$;

6) $\int_{-1}^0 2^{-x}dx$ или $\int_{-1}^0 3^{-x}dx$.

457. Докажите, что:

1) $\frac{\pi}{128}<\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{10}x\,dx<\frac{\pi}{4}$;   2) $2<\int_1^2 2^{x^2}dx<16$;

3) $\frac{e}{3}<\int_1^e \frac{dx}{\ln x+2}<\frac{e}{2}$;   4) $-\frac{1}{5}<\int_2^3 \frac{dx}{1+x-2x^2}<-\frac{1}{14}$;

5) $-\frac{2}{11}<\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{10+x}\,dx<\frac{2}{9}$;   6) $\frac{3}{2}<\int_{1/2}^2 \frac{4^x}{x}\,dx<48$.

458. Скорость движения точки меняется по закону $v=4t-t^2$, где v — скорость, м/с; t — время, с. Найдите: 1) путь, пройденный точкой за первые три секунды движения; 2) путь, пройденный точкой за третью

секунду; 3) путь, пройденный точкой от начала движения $t=0$ до ее остановки; 4) среднюю скорость движения за промежуток времени [0; 2]; 5) перемещение точки за первые 6 секунд движения; 6) путь, пройденный точкой за промежуток времени [0; 6].

459. Тело падает с высоты $h=2000$ м без начальной скорости. На какой высоте оно будет через: 1) одну секунду после начала падения; 2) через две секунды после начала падения? 3) Через сколько секунд тело достигает Земли? Сопротивлением воздуха пренебречь.

460. Мяч брошен с высоты 2 м вертикально вверх с начальной скоростью 15 м/с. На какую наибольшую высоту он поднимется?

461. Найдите путь, пройденный автобусом за время от начала торможения до полной остановки, если при торможении его скорость изменялась по закону $v=20-4t$, где v — скорость, м/с; t — время, с.

462. Тело массой 4 кг начинает двигаться без начальной скорости вдоль координатной прямой под действием периодически меняющейся со временем силы. Зависимость силы от времени выражается формулой $F=\pi^2\cos\frac{\pi t}{2}$, где F — сила, Н; t — время, с. Найдите: 1) перемещение тела за первые четыре секунды движения; 2) путь, пройденный телом за это время.

463. Турбина компрессора раскручивается с угловым ускорением, изменяющимся по закону $\varepsilon=2{,}4t$, где ε — угловое ускорение, рад/с^2; t — время, с. Определите:

1) на сколько увеличится угловая скорость турбины за первые 5 секунд после запуска;

2) на какой угол повернется турбина за промежуток времени [0; 5]?

464. Зависимость силы тока в цепи от времени выражается формулой $I=0{,}5\sin\frac{\pi t}{2}$, где I — сила тока, А; t — время, с.

Найдите среднюю силу тока за промежуток времени [0; 2].

43. Замена переменной в определенном интеграле. Замену переменной в определенном интеграле выполняют по формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(u(t))\,u'(t)\,dt, \qquad (1)$$

где пределы интегрирования a, b и α, β связаны соотношениями

$$a=u(\alpha), \quad b=u(\beta). \qquad (2)$$

Формулой (1) можно пользоваться следующим образом:

1) подобрать функцию $x=u(t)$ так, чтобы, подставив ее вместо x в подынтегральное выражение, получить более простой интеграл;

2) ввести новые пределы интегрирования α, β, найденные из соотношений (2);

3) вычислить полученный интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(u(t))\cdot u'(t)\,dt$.

В отличие от неопределенного интеграла возвращаться к первоначальной переменной при вычислении определенного интеграла не требуется.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_1^4 \frac{dx}{1+2\sqrt{x}}$.

□ Чтобы освободиться от иррациональности в подынтегральном выражении, выполним замену $\sqrt{x}=t$. Отсюда $x=t^2$, $dx=2t\,dt$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $\sqrt{x}=t$: если $x=1$, то $t=1$; если $x=4$, то $t=2$. Применив формулу (1), получим

$$\int\limits_1^4 \frac{dx}{1+2\sqrt{x}}=\int\limits_1^2 \frac{2t\,dt}{1+2t}=\int\limits_1^2 \frac{(1+2t)-1}{1+2t}\,dt=\int\limits_1^2 dt-\int\limits_1^2 \frac{dt}{1+2t}=$$

$$=t\Big|_1^2-\int\limits_1^2 \frac{dt}{1+2t}=t\Big|_1^2-\frac{1}{2}\ln|1+2t|\Big|_1^2=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}. \ \blacksquare$$

Если подынтегральное выражение имеет вид

$$f(u(x))\,u'(x)\,dx=f(u(x))\,du(x)$$

или приводится к этому виду, то замену переменной удобнее выполнять по следующей формуле:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(u(x))\,u'(x)\,dx=\int\limits_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(t)\,dt.$$

В этом случае рекомендуется:

1) представив подынтегральное выражение как $f(u(x))\,du(x)$, заменить $u(x)$ на t;

2) ввести новые пределы интегрирования, равные $u(\alpha)$, $u(\beta)$, где α, β — старые пределы интегрирования;

3) вычислить интеграл $\int\limits_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(t)\,dt$, если он проще исходного.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$.

□ Подынтегральное выражение представимо в виде

$$x\sqrt{x^2+9}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+9}\,d(x^2+9).$$

Поэтому целесообразно сделать замену $x^2+9=t$. Отсюда, полагая $x=0$ и $x=4$, получим новые пределы интегрирования соответственно $t=9$, $t=25$. Следовательно,

$$\int\limits_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^4\sqrt{x^2+9}\,d(x^2+9)=\frac{1}{2}\int\limits_9^{25}\sqrt{t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{3}t\sqrt{t}\Big|_9^{25}=\frac{98}{3}.\ ■$$

В задачах 465—468 вычислите следующие интегралы методом замены переменной:

465. 1) $\int\limits_{-1}^{0} 2x(x^2-1)^9\,dx$; 2) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

3) $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$; 4) $\int\limits_{-\sqrt[3]{3}}^{0} x^2 e^{\frac{1}{3}x^3+1}\,dx$;

5) $\int\limits_{-\sqrt{\pi}/2}^{\sqrt{\pi}/2} \frac{x\sin x^2}{2}\,dx$; 6) $\int\limits_{-1/\sqrt{2}}^{0} \frac{x\,dx}{5\sqrt{1-x^4}}$.

466. 1) $\int\limits_{0}^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$; 2) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$; 3) $\int\limits_{0}^{1} (e^x-1)^{10}e^x\,dx$.

467. 1) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos x}\sin x\,dx$;

2) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 x+3\sin x+1)\cos x\,dx$; 3) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \sin^3 x\,dx$;

4) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg} u\,du$; 5) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1+5\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$.

468. 1) $\int\limits_{0}^{1} \frac{9x^2\,dx}{1+3x}$; 2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dy}{2+\sqrt{y}}$;

3) $\int\limits_{1/2}^{1} x\sqrt[4]{2x-1}\,dx$.

469. Вычислите:

1) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(7-3x)^3}$; 2) $\int\limits_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}} xe^{x^2}\,dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{e^x\,dx}{3(1-2e^x)}$;

4) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\sin x+1}}$; 5) $\int\limits_{-\pi/12}^{\pi/4} \cos\left(4\varphi+\frac{\pi}{3}\right)d\varphi$;

6) $\int\limits_{1}^{2} \frac{6x+5}{(3x^2+5x+1)^2}\,dx$; 7) $\int\limits_{0}^{1} (t^2+3)^2\,dt$;

8) $\int\limits_{0}^{1} x(x^2+3)^4\,dx$; 9) $\int\limits_{-\sqrt[6]{3}}^{\sqrt[6]{3}} \frac{z^2}{z^6+1}\,dz$; 10) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$;

11) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} (\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta)^2\,d\theta$; 12) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\cdot\sin 4x\,dx$;

13) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx$; 14) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$; 15) $\int\limits_{1}^{4} \frac{9x-1}{3\sqrt{x}+1}\,dx$;

16) $\int\limits_0^{1/9} \frac{9dx}{3\sqrt{x}+1}$; 17) $\int\limits_0^1 \frac{9x-1}{\sqrt{3x+1}}dx$;

18) $\int\limits_0^{\pi} (\cos^4 x - \sin^4 x)\,dx$.

44. Приближенные методы вычисления определенного интеграла. Для приближенного вычисления определенного интеграла используются следующие формулы:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(a)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right),$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(b)\right),$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f\left(\frac{a+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{x_{n-1}+b}{2}\right)\right),$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right).$$

Первые три называются *формулами прямоугольников*, последняя — *формулой трапеций* для приближенного вычисления определенного интеграла.

470. Криволинейная трапеция ограничена параболой $y=x^2+1$ и прямыми $x=0$, $x=1$, $y=0$. Найдите приближенное значение площади этой трапеции, заменив ее ступенчатой фигурой, состоящей из n прямоугольников с основаниями $\left[\frac{i}{n}; \frac{i+1}{n}\right]$, $i=0, 1, \ldots, n-1$, и высотами, соответственно равными $f\left(\frac{i}{n}\right)$, если: 1) $n=2$; 2) $n=4$; 3) $n=8$.

Укажите (в %) точность этих приближений.

471. Вычислите площадь поперечного сечения судна по данным рис. 60. Измерения даны в метрах.

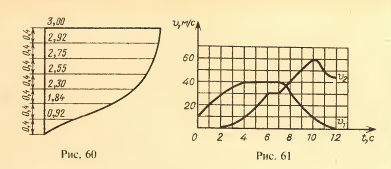


Рис. 60 Рис. 61

472. На рис. 61 даны графики скоростей двух прямолинейно движущихся тел. Вычислите приближенно путь, пройденный каждым из тел.

473. Вычислите приближенно по формулам прямоугольников и трапеций с шагом h интеграл:

1) $\int\limits_0^5 (3x^2+2)\,dx$; $h=0{,}5$; 2) $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 4x\,dx$, $h=\frac{\pi}{12}$;

3) $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$, $h=0{,}1e$.

Найдите относительные погрешности результатов.

474. Зная, что

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4},$$

вычислите число π, пользуясь: 1) формулой прямоугольников при $n=5$, $n=7$, $n=10$; 2) формулой трапеций при $n=5$, $n=7$, $n=10$. Полученные результаты сравните с табличным значением числа π.

475. Электрическая цепь питается батареей аккумуляторов. В течение 7 минут напряжение на клеммах падает. Его числовые значения занесены в таблицу. Вычислите приближенно количество электричества, прошедшее через поперечное сечение проводника за этот промежуток времени, если сопротивление цепи постоянно и равно 10 Ом.

t, мин	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
U, В	60,5	60	59,4	59	58,7	58,2	57,9	57,3	49,8	49,3	48,9	48	47,3	47

476. Вычислите приближенно по формуле трапеций интеграл:

1) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad (n=3,\ 6,\ 9);$

2) $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{\ln x} \quad (n=3,\ 6,\ 9).$

§ 13. Приложения определенного интеграла

45. Вычисление площадей плоских фигур. Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$, вычисляется по формуле

$$S=\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=1/x^2$, $y=0$, $x=2$ $(x\geqslant 0)$.

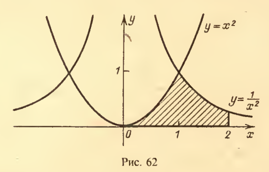


Рис. 62

□ Кривые $y=x^2$ и $y=1/x^2$ пересекаются в точке с абсциссой $x=1$. Заданная фигура (рис. 62) является криволинейной трапецией, ограниченной сверху графиком функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{x^2}, & \text{если } 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

По формуле (1)

$$S=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2 \frac{dx}{x^2}=\frac{5}{6}. \blacksquare$$

Площадь S фигуры, ограниченной графиком непрерывной неположительной функции $y=f(x)$ прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$, равна

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-e^x$, $x=0$, $x=\ln\frac{1}{2}$, $y=0$ (рис. 63).

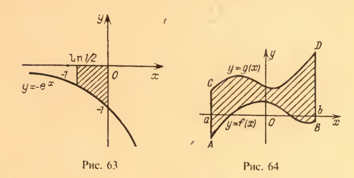


Рис. 63

Рис. 64

Согласно формуле (2) имеем

$$S=-\int_{\ln\frac{1}{2}}^{0}\left(-e^x\right)dx=e^x\Big|_{\ln\frac{1}{2}}^{0}=e^0-e^{\ln\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}. \blacksquare$$

Площадь фигуры $ACDB$ (рис. 64), ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$ и графиками непрерывных функций $y=f(x)$, $y=g(x)$ таких, что $g(x)\geqslant f(x)$ на $[a;b]$, вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b \left(g(x)-f(x)\right)dx. \qquad (3)$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $x=5\pi/4$, $x=0$.

□ Искомая площадь S равна сумме площадей S_1 и S_2 двух фигур, первая из которых ограничена линиями $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $x=0$, $x=\pi$, вторая — линиями $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $x=\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$ (рис. 65). Для

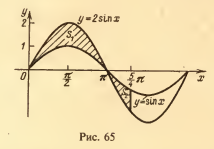


Рис. 65

вычисления площадей S_1 и S_2 применим формулу (3):

$$S_1=\int_0^{\pi}(2\sin x-\sin x)\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2,$$

$$S_2=\int_{\pi}^{5\pi/4}(\sin x-2\sin x)\,dx=-\int_{\pi}^{5\pi/4}\sin x\,dx=$$

$$=\cos x\Big|_{\pi}^{5\pi/4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1.$$

Тогда

$$S=S_1+S_2=3-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 2{,}29. \blacksquare$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ $(x\geqslant 0)$, $y=1$, $y=4$, $x=0$.

□ Заданная фигура симметрична относительно прямой $y=x$ криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=1$, $x=4$, $y=0$ и графиком функции $y=\sqrt{x}$, обратной функции $y=x^2$ $(x\geqslant 0)$ (рис. 66). Поэтому эти фигуры имеют равные площади:

$$S=\int_1^4\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4=\frac{14}{3}. \blacksquare$$

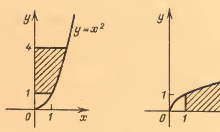


Рис. 66

В задачах 477—478 вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

477. 1) $y=4-x^2$, $y=0$;
2) $y=x^2+2x+2$, $y=0$, $x=0$, $x=-3$;
3) $y=-x^2+7x-10$ $(2\leqslant x\leqslant 3)$, $y=0$, $x=3$;
4) $y=1/x$, $x=e$, $x=e^2$, $y=0$;
5) $y=1+e^x$, $x=0$, $x=-4$, $y=0$;
6) $y=\sqrt{x}$, $x=4$, $y=0$;
7) $y=1/x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$;
8) $y=\cos^2 x-\sin^2 x$ $(0\leqslant x\leqslant \pi/4)$, $y=0$, $x=0$.

478. 1) $y=x$, $y=4-x$, $y=0$, $x=3$;
2) $y=1$, $y=1/x$, $x=0$, $x=e$, $y=0$;
3) $y=x$, $y=1/x^2$, $y=0$, $x=2$;
4) $y=x^2+1$, $y=2x+9$, $x=0$, $y=0$;
5) $y=x^2$, $y=\frac{1}{x^2}$ $(x\geqslant 0)$, $y=0$, $x=5$;
6)* $y=\sin x$, $y=3x/\pi$, $y=0$.

479. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:
1) $y=x^2-7x+10$, $y=0$;
2) $y=x-2x^2-1$, $x=0$, $x=1/2$, $y=0$;
3) $y=x^2-3x-4$, $y=0$, $x=5$;
4) $y=e^x-1$, $x=\ln\frac{1}{2}$, $y=0$;
5) $y=2\sin\frac{x}{2}$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=3\pi$;
6) $y=x^3-4x$, $y=0$.

480. Изобразите:
1) криволинейную трапецию, площадь которой вычисляется по формуле $S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx$;

2) некоторую фигуру, не являющуюся криволинейной трапецией, с площадью, равной $S=\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx$.

481*. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$, $c<d$, осью y и графиком непрерывной возрастающей (убывающей) функции $y=f(x)$ $(x\geqslant 0)$, равна $S=\int\limits_c^d \varphi(x)\,dx$, где $y=\varphi(x)$ — функция, обратная функции $y=f(x)$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (482—484).

482. 1) $y=x^2-2$ $(x\geqslant 0)$, $y=-1$, $y=7$, $x=0$;
2) $y=\sqrt{x-1}$, $y=1$, $y=0$, $x=0$;
3) $y=1/x^2$, $y=1$, $y=4$, $x=0$;
4) $y=\ln x$, $x=0$, $y=1$, $y=-1$.

483. 1) $y=x$, $y=2x$, $x=4$;
2) $y=-x$, $y=2-x$, $x=-2$, $x=4$;
3) $y=(x+1)^2$, $y=4$; 4) $y=e^x$, $y=e$, $x=-1$;
5) $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$;
6) $y=4x^2$, $y=x^2+3$; 7) $y=x^2$, $y=8-x^2$;
8) $y=\sin x$, $y=1$, $x=0$, $x=\pi$;
9) $y=\sin x$, $y=x$, $x=\pi$;
10) $y=1/x^2$, $y=x$, $x=3$.

484. 1) $y=3^x$, $y=2^x$, $x=1$;
2) $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{1-x}$, $y=0$;
3) $y=\frac{1}{x^2}$, $y=-1/x^2$, $x=-3$, $x=-1$;
4)* $y=x^3-3x$, $y=x$;
5) $y=-x$, $y=2-x$, $y=-4$, $y=3$;
6) $y=-x^2+4$, $y=x^2-2x$;
7) $y=\frac{x^2}{2}$, $y=x^2+1$, $x=-1$, $x=1$;
8) $y=\sin x$, $y=\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi/2)$, $y=0$;
9) $y=\sin x$, $y=\cos x$ $(\pi/4\leqslant x\leqslant 5\pi/4)$;
10)* $y=x$, $y=2x$, $y=x^2$.

485. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+2$, касательной к ней в точке $M(1;\ 3)$ и осью ординат.

486. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=e^x$, касательной к ней в точке $(0;\ 1)$ и прямой $x=1$.

487. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=1/x$, касательной к ней в точке $(1;\,1)$ и прямой $x=3$.

488. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $y=1/x$, касательной к ней в точке $(1;\,1)$, прямой $x=3$ и осью x.

489. Исходя из геометрического смысла определенного интеграла, вычислите:

1) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$;

3) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x\,dx$;

490. При каком значении a прямая $x=a$ делит площадь фигуры, ограниченной линиями $y=1/x^2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$, пополам?

491. При каком значении a площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+a^2x+1$, $y=0$, $x=0$, $x=1$, будет наименьшей?

492. При каком положительном значении a площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=\frac{x}{4}+\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=a$, $x=a+3$, принимает наименьшее значение?

493. Найдите площадь поперечного сечения канала для орошения, имеющего форму параболического сегмента (рис. 67).

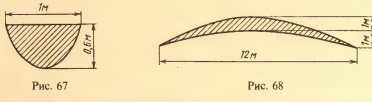


Рис. 67 Рис. 68

494. Серповидная опора, у которой верхний и нижний контуры представляют собой параболы (рис. 68), изготовлена из 10-миллиметрового плоского стального листа. Найдите массу этой опоры по формуле $m=\rho\cdot S\cdot d$, где $\rho=7{,}8\cdot 10^3$ кг/м^3 — плотность стали, S — площадь сечения опоры, d — ее толщина.

46. Применение интеграла в физике. Если известна скорость протекания некоторого процесса (т. е. скорость изменения некоторой величины $F(t)$ относительно дру-

гой t, то с помощью определенного интеграла можно найти, на сколько изменится исследуемая величина $F(t)$, когда t меняется от a до b:

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Пример 1. Скорость нагревания тела зависит от времени по следующему закону: $v=0{,}03t+0{,}1$, где t — время, с; v — скорость, К/с. На сколько градусов нагреется тело в течение первой минуты?

□ Если $\theta(t)$ — температура тела в момент времени t, то $\theta'(t)=0{,}03t+0{,}1$. Требуется найти приращение функции $\theta(t)$ за промежуток времени $[0;60]$. На основании формулы (1) имеем

$$\theta(60)-\theta(0)=\int_0^{60}\theta'(t)\,d\theta=\int_0^{60}(0{,}03t+0{,}1)\,dt=$$

$$=\left(\frac{0{,}03t^2}{2}+0{,}1t\right)\Bigg|_0^{60}=60\text{К}. \ ■$$

Если материальная точка движется вдоль оси x под действием переменной силы, проекция $F(x)$ которой на ось x есть функция координаты x, то работа силы по перемещению точки из положения $x=a$ в положение $x=b$ равна

$$A=\int_a^b F(x)\,dx. \qquad (2)$$

Пример 2. Материальная точка M движется по координатной прямой под действием силы, величина которой меняется прямо пропорционально расстоянию от точки до начала координат O. Известно, что направление силы совпадает с направлением оси и что она равнялась 1 Н, когда расстояние MO было равно 3 м. Вычислить работу этой силы по переносу точки на расстояние 15 м от начала координат.

□ Из условия задачи следует, что сила $F(x)$, действующая на точку, меняется по закону $F(x)=kx$, где коэффициент пропорциональности k находится из уравнения $1=k\cdot 3$, $k=1/3$. Таким образом, $F(x)=x/3$ и работа силы на пройденном пути согласно (2) равна

$$A=\int_0^{15}\frac{x\,dx}{3}=\frac{x^2}{6}\Bigg|_0^{15}=37{,}5\text{ Дж}. \ ■$$

Если в жидкость с плотностью ρ вертикально погружена пластинка $ABCD$ (рис. 69), то сила давления жидкости P на нее равна

$$P=\rho \cdot g\int_a^b xf(x)\,dx, \qquad (3)$$

где $y=f(x)$ — функция, выражающая зависимость длины поперечного сечения пластины от уровня погружения x, g — ускорение свободного падения.

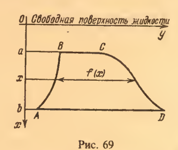


Рис. 69

Пример 3. Вычислить силу давления воды на треугольную пластину ABC с основанием $AC=9$ м и высотой $BD=2$ м, вертикально погруженную, если вершина B лежит на свободной поверхности жидкости, а AC — параллельно ей (рис. 70).

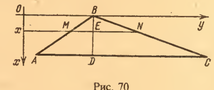


Рис. 70

□ Пусть MN — поперечное сечение пластины на уровне $BE=x$. Найдем зависимость длины MN от x. Из подобия треугольников MBN и ABC имеем $MN/AC=BE/BD$ или $MN/9=x/2$. Отсюда $MN=f(x)=$ $=4{,}5x$. На основании формулы (3) получим

$$P=\rho g\int_0^2 4{,}5x^2dx=4{,}5\rho g\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=12\rho g\approx 1{,}2\cdot 10^5 \text{ Н},$$

так как плотность воды 1000 кг/м^3 и $g\approx 9{,}8$ м/с^2. ■

495. Определите массу стержня длиной 10 см, если линейная плотность стержня меняется по закону $\mu=6+0{,}3x$, где μ — линейная плотность, кг/м; x — расстояние от произвольной точки стержня до одного из его концов, м.

496. Электрическая цепь с постоянным напряжением $U=6$ В имеет в начальный момент сопротивление $R=1$ Ом, которое в дальнейшем равномерно возрастает со скоростью 3 Ом/с.

Найдите заряд, протекший через цепь за промежуток времени [0; 9].

497. Скорость распада радия изменяется по закону $m'=-\frac{m_0 \ln 2}{1600} 2^{-t/1600}$, где m_0 — начальная масса, г; t — время, год. На сколько уменьшится масса радия за 200 лет после начала отсчета времени, если $m_0=0{,}5$ г?

498. Груз массой 3 кг растягивает пружину на 0,04 м. Какую работу он при этом совершает?

499. Вычислите работу, совершаемую при сжатии пружины на 0,05 м, если для сжатия ее на 0,02 м нужна сила 10 Н.

500. Для растяжения пружины на 0,03 м необходимо совершить работу в 16 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу в 144 Дж?

501. Рессора прогибается под нагрузкой 1,5 т на 1 см. Какую работу нужно затратить для деформации рессоры на 3 см? (Сила деформации пропорциональна величине деформации.)

502*. Два электрических заряда e_1 и e_2 по 10 Кл каждый закреплены неподвижно на расстоянии 5 см друг от друга. Разделяющей их средой служит воздух. Затем заряд e_2 освобождается и удаляется от заряда e_1 под действием силы отталкивания, которая меняется по закону Кулона

$$F=k\frac{e_1 e_2}{\varepsilon r^2},$$

где F — сила, Н; e_1, e_2 — взаимодействующие заряды, Кл; r — расстояние между ними, см; ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды, $k=9\cdot10^9$ Н·м²/Кл² — коэффициент пропорциональности. Какую работу совершит сила отталкивания, если заряд e_2 удалится от e_1 на расстояние: 1) 10 см; 2) 15 см?

503. Вычислите силу давления воды на прямоугольные ворота шлюза, ширина которых 24 м, а высота 6 м, если шлюз заполнен водой только на две трети.

504. Найдите силу давления воды на боковые стенки и дно резервуара, имеющего форму куба с ребром, равным 0,8 м, если он заполнен водой: 1) доверху; 2) наполовину.

505. Треугольная пластинка ABC с боковыми сторонами, равными 5 см, и основанием $AC=8$ см погружена вертикально в воду. Найдите силу давления воды на эту пластинку, если: 1) вершина B лежит на поверхности воды, а основание AC параллельно поверхности; 2) вершина B лежит на 1 см ниже поверхности воды, а основание AC параллельно поверхности; 3) основание AC лежит на поверхности воды; 4) вершина B лежит на 1 см выше поверхности воды, а основание AC параллельно этой поверхности.

506. Круглый иллюминатор диаметром 30 см на вертикальном борту судна наполовину погружен в воду. Найдите силу давления воды на погруженную часть иллюминатора.

507. Вычислите работу, которую необходимо затратить для того, чтобы выкачать воду, наполняющую цилиндрический резервуар высотой $h=6$ м и радиусом основания $r=3$ м.

508*. Найдите количество теплоты, выделяемое переменным синусоидальным током $I=3\sin 100\pi t$ (I — сила тока, А; t — время, с) в течение периода в проводнике с сопротивлением $R=200$ Ом.

509*. Найдите кинетическую энергию однородного диска радиусом R и массой m, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр диска и перпендикулярной его плоскости.

Глава 6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 14. Дифференциальные уравнения первого порядка

47. Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения, содержащие производные искомой функции, называют *дифференциальными.* Наивысший порядок производной неизвестной функции, входящей в уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения.*

Решением дифференциального уравнения называется функция, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество. Решить дифференциальное уравнение — значит найти все его решения. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Простейшим дифференциальным уравнением первого порядка является уравнение

$$y'=f(x),$$

где $f(x)$ — заданная функция. Множество решений этого уравнения является неопределенным интегралом от функции $f(x)$:

$$y=\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная.

Многие дифференциальные уравнения первого порядка можно записать в виде

$$y'=f(x,y) \quad \text{или} \quad dy=f(x,y)\,dx.$$

Это уравнение имеет бесконечно много решений. Чтобы выделить единственное решение уравнения, достаточно задать значение искомой функции при фиксированном значении аргумента.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего условию

$$y(x_0)=y_0,$$

где x_0, y_0 — заданные числа, называется *задачей Коши.*

Условие $y(x_0)=y_0$ называется *начальным условием*, так как с физической точки зрения оно означает, что в фиксированный (начальный) момент времени задано значение физической величины.

Геометрический смысл задачи Коши состоит в нахождении интегральной кривой уравнения, проходящей через заданную точку.

Пример 1. Найти решение задачи Коши

$$y'=2x+1, \quad y(1)=3.$$

□ Решениями данного уравнения являются функции

$$y=\int(2x+1)\,dx=x^2+x+C,$$

где C — произвольная постоянная. Пользуясь начальным условием, имеем $y(1)=1+1+C=3$. Следовательно, $C=1$ и искомое решение $y=x^2+x+1$. ■

Пример 2. Составить дифференциальное уравнение процесса изменения скорости тела при замедленном прямолинейном движении под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости.

□ Пусть $v(t)$ — скорость тела в момент времени t. Тогда скорость изменения $v(t)$ (ускорение) равна $v'(t)$ и согласно закону Ньютона $mv'(t)=F(t)$, где m — масса тела, а $F(t)$ — сила, действующая на тело в момент времени t. По условию $F(t)=-kv^2(t)$, $k>0$ — коэффициент пропорциональности (знак минус указывает на то, что скорость тела уменьшается). Следовательно, функция $v=v(t)$ является решением дифференциального уравнения $v'=-\frac{k}{m}v^2$. ■

510. Проверьте, является ли заданная функция решением данного дифференциального уравнения:

1) $y=e^{2x}$, $\quad y'=2y$;

2) $y=e^{-x}+1$, $\quad \frac{dy}{dx}=-y+1$;

3) $v=\frac{1}{3(t+1)}$, $\quad v'=3v^2$;

4) $y=e^{-2x}+e^x$, $\quad y'+3y=3e^x$;

5) $y=\frac{1}{\sqrt{x+C}}$, $\quad y'=-\frac{1}{2}y^3$;

6) $y=-\frac{2}{x^2+C}$, $\quad dy=xy^2dx$.

511. Найдите значения параметра k, при которых заданная функция является решением данного уравнения:

1) $y=kx+1$, $y'=2$;
2) $x=kt^2$, $x'=12t$;
3) $y=e^{kt}$, $y'=y$;
4) $x=e^{-t}$, $x'=kx$;
5) $v=t^3$, $v'=kt^2$;
6) $y=\frac{1}{x+1}$, $y'=ky^2$.

512. Составьте дифференциальное уравнение, решениями которого являются функции:

1) $y=\frac{1}{2}x^2+C$; 2) $y=x^3+C$;
3) $y=Ce^{2x}$; 4) $y=Ce^{-2x+1}$;
5) $y=Ce^{-x}+e^{3x}$; 6) $v=Cx^3$.

513. Найдите угловой коэффициент касательной к интегральной кривой данного дифференциального уравнения в точке (1; 2):

1) $y'=2x$; 2) $y'=-y$; 3) $y'=y+x$; 4) $y'+xy=1$.

514*. Докажите, что касательные ко всем интегральным кривым дифференциального уравнения $y'+xy=1$ в точках пересечения кривых с осью y параллельны.

515. Решите дифференциальное уравнение:

1) $y'=3$; 2) $\frac{dy}{dx}=x$;
3) $y'+4x=0$; 4) $\frac{dy}{dx}=2-3x$;
5) $y'=\frac{2}{3}x^{-1/3}$; 6) $x'=2t^3+3t+5$;
7) $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t+1}$; 8) $\frac{ds}{dt}=4\cos t$;
9) $y'=x+\sin x$; 10) $y'=e^{-3x}$;
11) $y'=\frac{1}{2}x+\operatorname{tg} x$; 12)* $e^{y'}=1$; 13)* $\cos y'=1$.

516. Изобразите семейство интегральных кривых дифференциального уравнения:

1) $y'=1/2$; 2) $y'=\cos x$;
3) $y'=e^{-x}$; 4) $\frac{dy}{dx}=1/x$.

517. Решите задачу Коши:

1) $y'=3x^2+2x+1$, $y(1)=4$;

2) $y'=4x^{-3}$, $y(1)=2$;

3) $y'=\frac{1}{3}\sin 3x, y(0)=5/6$; 4) $y'=e^{3x/2}+1$, $y(0)=-2$;

5) $\frac{ds}{dt}=3-\frac{1}{3}t^2+8t^3$, $s(0)=3$; 6) $\frac{dx}{dt}=-2$, $x(-1)=1$.

518. Через точку A (1; 2) проведите интегральную кривую дифференциального уравнения: 1) $\frac{dy}{dx}=2x+1$; 2) $y'=-1/x^2$; 3) $y'=1/\sqrt{x}$; 4) $y'=e^{x-1}$.

519. Найдите кривую, проходящую через точку A (1; 5), если угловой коэффициент касательной в точке кривой с абсциссой x равен:

1) $4x^2+8x$; 2) $2/(x+1)^2$;

3) $\sqrt{2x-1}$; 4) $\sin(x-1)$.

520. Тело движется прямолинейно со скоростью $v=v(t)$, где v — скорость, м/с; t — время, с. Найдите закон движения тела, если: 1) $v=4t$ и при $t=1$ тело находилось в начале координат; 2) $v=kt^2+1$, $k>0$, тело начало двигаться из начала координат и за три первых секунды прошло путь, равный 30 м; 3) $v=18-2t^2$ и в момент остановки тело находилось на расстоянии 12 м от начала координат.

521. Скорость изменения физической величины описывается законом $v=1-4t$, где v — скорость изменения величины, t — время, с. В начальный момент времени $t=0$ значение величины равнялось 3.

1) Найдите закон изменения величины.

2) Определите значение величины через 10 с.

3) Через какое время величина достигнет наибольшего значения?

4) Сколько времени потребуется для того, чтобы значение величины уменьшилось до 1% начального значения?

522. Составьте дифференциальное уравнение процесса: 1) изменения скорости при замедленном прямолинейном движении тела под действием силы сопротивления среды, пропорциональной скорости v; 2) радиоактивного распада вещества, если скорость распада пропорциональна массе m нераспавшегося вещества; 3) потери сообщенного телу заряда в слабо проводящей среде, если скорость изменения количества заряда пропорционально имеющемуся заряду Q; 4) увеличения числа микробов N в питательной среде, если число делящихся в единицу времени микробов пропорционально име-

ющемуся числу микробов; 5) изменения температуры тела T в среде с температурой T_1, если скорость изменения T пропорциональна разности температур тела и среды.

523. Дано дифференциальное уравнение $y' = ky$. Являются ли функции $y = Ce^{kx}$ решениями уравнения? Найдите решение уравнения, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$. Найдите такие значения k, при которых полученное решение удовлетворяет условию $y(4) = 6$.

524. Процесс изменения величины описывается дифференциальным уравнением $x' = -kx$, $k > 0$, где x — значение величины в момент времени t с. В начальный момент значение величины равнялось x, а через 10 с уменьшилось в два раза.

1) Найдите зависимость величины от времени.

2) Определите, во сколько раз изменилось значение величины через 100 с.

3) Через какое время значение величины уменьшится в 100 раз?

525. Материальная точка замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной скорости. Найдите зависимость скорости точки от времени, если в момент $t = 0$ скорость равнялась 5 м/с, а через 1 с — 2 м/с. Определите скорость движения точки через четыре секунды. В какой момент времени скорость будет равна 1 м/с?

526. Вращающийся в жидкости диск замедляет свое движение под действием силы трения, пропорциональной угловой скорости ω. Известно, что в начале замедления $\omega = 12$ рад/с, а через 40 с $\omega = 8$ рад/с. Найдите зависимость угловой скорости от времени. С какой угловой скоростью будет вращаться диск в момент $t = 120$ с? В какой момент времени угловая скорость вращения диска равна 1 рад/с?

527. Автомобиль в момент выключения двигателя шел со скоростью 20 м/с. Через 25 с скорость автомобиля уменьшилась до 5 м/с. Определите, через сколько секунд после выключения двигателя скорость окажется равной 1,25 м/с, если движение автомобиля замедляется под действием силы трения, пропорциональной скорости движения.

528. Изолированный проводник вследствие несовершенства изоляции теряет сообщенный ему заряд со скоростью, пропорциональной наличному заряду в данный момент времени. Найдите зависимость количества

заряда проводника от времени, если в начальный момент времени $t=0$ проводнику сообщен заряд 2000 Кл, а за первые 2 минуты потеряно 150 Кл. Через сколько минут заряд проводника уменьшится вдвое?

529. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличной массе. Определите, какой процент массы m_0 радия распадается через 200 лет, если известно, что период полураспада радия (время, за которое масса вещества уменьшается вдвое) равен 1590 лет.

530. При брожении скорость прироста действующего фермента пропорциональна его имеющейся массе. Через 2 часа после начала брожения масса фермента составила 2 г, через 3 часа — 3 г. Какова была первоначальная масса фермента?

531. Начальная стоимость оборудования 2 млн. руб. За первый год по оценке экспертов его износ составил 1% от начальной стоимости. Найдите стоимость оборудования через 10 лет, считая, что скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна в каждый данный момент времени его фактической стоимости. Через сколько лет оборудование практически обесценится?

532. В 1970 г. население СССР составляло 241,7 млн. человек, а годовой прирост равнялся 2,2 млн. человек.

1) Найдите численность населения СССР в 1951, 1956, 1973, 1975, 1979, 1983, 1989 г., считая, что скорость прироста населения в данный момент времени пропорциональна числу жителей в тот же момент.

2) Определите, с какой точностью (в процентах) полученные результаты соответствуют статистическим данным:

Годы	1951	1956	1973	1975	1979	1983	1989
Население (млн. чел.)	181,6	197,9	248,7	253,3	262,4	271,2	

3) Что можно сказать о правомерности использования приведенного закона изменения скорости прироста населения: а) на небольших промежутках времени; б) на больших промежутках времени?

48. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Дифференциальное уравнение первого по-

рядка называется *уравнением* с *разделяющимися переменными*, если его можно привести к виду

$$y' = f(x)g(y).$$

Уравнение этого вида решается с помощью разделения переменных

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

и интегрирования обеих частей полученного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$y' = 2y/x.$$

□ Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}\,dx.$$

Интегрируя обе части полученного уравнения, имеем

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x}\,dx \quad \text{или} \quad \ln|y| = 2\ln|x| + C_1,$$

где C_1 — постоянная интегрирования. Для удобства потенцирования запишем $C_1 = \ln C$ и, выразив y через независимую переменную x и произвольную постоянную C, получим решения дифференциального уравнения

$$y = Cx^2. \ ■$$

При решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными возможна потеря решений при разделении переменных. В решении примера 1 мы фактически предполагали, что $y \neq 0$, т. е. функцию $y = 0$ исключили из рассмотрения. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $y = 0$ является решением данного уравнения. Это решение может быть получено из множества решений $y = Cx^2$ при $C = 0$. Поэтому в рассмотренном примере потери решений не произошло.

Пример 2. Решить уравнение

$$y' = 2x(y-1)^2.$$

□ Разделив переменные

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = 2x\,dx$$

и проинтегрировав, получим

$$-\frac{1}{y-1}=x^2+C,$$

где C — произвольная постоянная. Отсюда следует, что решениями данного уравнения являются функции

$$y=-\frac{1}{x^2+C}+1.$$

Функция $y=1$ является решением уравнения. Однако она не входит в полученное множество решений, так как равенство $-\frac{1}{x^2+C}+1=1$ не выполняется ни при каких значениях C. Поэтому решениями данного уравнения являются функции

$$y=-\frac{1}{x^2+C}+1, \quad y=1. \ ■$$

Пример 3. Материальная точка замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости $v(t)$. Найти зависимость скорости от времени, если $v(0)=0{,}5$ м/с, а $v(1)=0{,}25$ м/с. Какова будет скорость точки через 3 с после начала замедления движения? В какой момент времени скорость будет равна 0,1 м/с?

□ Замедленное движение материальной точки под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости v, описывается дифференциальным уравнением

$$v'=-\frac{k}{m}v^2,$$

где k — коэффициент пропорциональности, m — масса тела (см. решение примера 2 п. 47). Решив полученное уравнение с разделяющимися переменными, имеем

$$v=\frac{1}{\frac{k}{m}t+C}, \qquad v=0.$$

Для определения параметров C и k/m воспользуемся условиями

$$v(0)=1/C=0{,}5, \quad v(1)=\frac{1}{(k/m)+C}=0{,}25.$$

Отсюда $C=2$, $k/m=2$. Следовательно, скорость материальной точки изменяется по закону

$$v=\frac{1}{2(t+1)}.$$

Вычислим скорость точки через 3 с после начала замедления движения:

$$v(3)=\frac{1}{2(3+1)}=0{,}125 \text{ м/с}.$$

Момент времени, для которого скорость будет равна 0,1 м/с, определяется из уравнения

$$\frac{1}{2(t+1)}=0{,}1.$$

Отсюда $t=4$ с. ■

533. Дано уравнение $y'=y^2$. 1) Докажите, что функции $y=-1/(x+C)$ являются его решениями. 2) Содержится ли решение $y=0$ среди этих функций? 3) Найдите решение уравнения, удовлетворяющее условиям: а) $y(1)=1$; б) $y(1)=0$.

534. Решите уравнения:
1) $y'=y$; 2) $3y'=(1+x^2)/y^2$; 3) $tx'=1+x$;
4) $(x^2+1)\,dy-xy\,dx=0$; 5) $\sqrt{y}\,dx+x^2\,dy=0$;
6) $v'-2tv=0$; 7) $y'=2y-1$; 8) $y'=-y+2$;
9) $y'=ay+b$, $a\neq 0$; 10) $v'=-kv^2$.

535. Решите задачу Коши:
1) $x\,dy=y\,dx$, $y(2)=6$; 2) $3y^2\,dy=x^2\,dx$, $y(3)=1$;
3) $y'=xe^{-y}$, $y(1)=0$; 4) $x'=2+x$, $x(0)=3$;
5) $y'-(y/x)=0$, $y(1)=5$;
6) $(x-1)\,dy=(y+1)\,dx$, $y(2)=3$;
7) $y'=ky$, $y(0)=3$; 8) $y\,\mathrm{tg}\,x\,dx+dy=0$, $y(0)=8$;
9) $y'=ay+b$, $y(0)=0$; 10) $v'=kv$, $v(0)=v_0$.

536. Проведите через точку M (1; 4) интегральную кривую уравнения:
1) $y'=y/x$; 2) $y'=2\sqrt{y}$;
3) $y'=-y$; 4) $y'=-y+2$.

537. Найдите кривую, проходящую через точку A $(-2;\ 1)$, если: 1) угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой равен ординате этой точки; 2) угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой равен квадрату ординаты этой точки; 3) точка пересечения любой касательной к кривой с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки

касания; 4) отрезок любой касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.

538*. Сосуд объемом 40 л содержит 80% азота и 20% кислорода. В сосуд каждую секунду втекает 0,2 л азота в вытекает такое же количество смеси. Составьте дифференциальное уравнение процесса.

539. Процесс изменения концентрации азота в сосуде объемом 40 л описывается дифференциальным уравнением $x' = -5 \cdot 10^{-2}(x-40)$, где x — количество азота, л; t — время, с. В начальный момент в сосуде было 30 л азота.

1) Найдите закон изменения количества азота в сосуде в зависимости от времени.

2) Сколько азота будет в сосуде через 30 с?

3) Через какое время сосуд будет практически заполнен азотом?

540. В комнате с температурой воздуха 20° С некоторое тело охлаждается от 100 до 60° С за 20 минут. Считая скорость остывания тела пропорциональной разности температур тела и окружающей среды, определите, за какое время тело остынет до 30° С. Через сколько минут чайник практически остынет?

541. Материальная точка массой $m=0,75$ кг погружается в жидкость без начальной скорости. На нее действуют сила тяжести и сила сопротивления жидкости, пропорциональная скорости погружения (коэффициент пропорциональности $k=3$). Найдите зависимость скорости движения точки от времени. Вычислите скорость точки через 2 с и 10 с после начала погружения.

49. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x),$$

где $p(x)$ и $f(x)$ — заданные функции, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка.*

Если $f(x)=0$, то уравнение принимает вид

$$y' + p(x)y = 0$$

и называется *линейным однородным.* Оно является уравнением с разделяющимися переменными.

Если $f(x) \not\equiv 0$, то рассматриваемое уравнение называется *линейным неоднородным* и может быть решено

с помощью подстановки $y=uv$, где u и v — функции x. Тогда $y'=uv'+vu'$. Подставляя y и y' в уравнение, получим

$$uv'+vu'+p(x)uv=f(x)$$

или

$$uv'+v(u'+p(x)u)=f(x).$$

Выберем функцию u так, чтобы $u'+p(x)u=0$, т. е. u — решение линейного однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному. Тогда v можно найти из уравнения

$$uv'=f(x).$$

Пример 1. Решить уравнение

$$y'-\frac{2}{x}y=x.$$

◻ Положим $y=uv$. Тогда $y'=u'v+v'u$. Подставим эти значения y и y' в данное уравнение:

$$uv'+vu'-\frac{2}{x}uv=x.$$

Сгруппировав члены, содержащие v, получим

$$uv'+v\left(u'-\frac{2}{x}u\right)=x.$$

Выберем функцию u так, чтобы сомножитель при v обратился в нуль, т. е.

$$u'-\frac{2}{x}u=0.$$

Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получим $u=Cx^2$. Выберем одно из решений, например $u=x^2$. Тогда уравнение примет вид $x^2v'=x$.

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$v=\ln|x|+C.$$

Искомое решение

$$y=x^2(\ln|x|+C).$$ ■

542. При каком значении коэффициента p функция $y=e^{3x}$ является решением уравнений:

1) $y'+py=0$;
2) $y'+py=e^{3x}$;
3) $y'+py=e^{4x}$?

543. Найдите такие функции $p(x)$ и $f(x)$, чтобы решениями уравнения $y'+p(x)y=f(x)$ являлись функции:

1) $y=2$ и $y=x^2+2$;

2) $y=\sin x-1$ и $y=-1$.

544. Решите уравнения:

1) $y'+y=2$; 2) $y'-\frac{2}{x}y=2x^4$; 3) $xy'-3y=x^4$;

4) $\frac{dy}{dx}+2y=e^x$; 5) $x'-3x=e^{-t}$;

6) $y'+2xy=2xe^{x^2}$; 7) $(x+1)y'+y=\cos x$;

8) $y'\cos x+y\sin x=1$; 9) $(x+1)\frac{dy}{dx}-2y=(x+1)^4$.

545. Найдите решение уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию:

1) $y'-2y=1$, $y(0)=1/2$;

2) $y'-3y/x=x$, $y(1)=1$;

3) $2y'-y=e^x$, $y(0)=5$;

4) $\frac{dy}{dx}-2xy=e^{x^2}$, $y(2)=0$;

5) $x'-\frac{3}{t}x=t^3e^{t-1}$, $y(1)=-2$;

6) $x(y'-x\cos x)=y$, $y(\pi/2)=\pi/2$;

7) $xy'+y=\sin x$, $y(\pi/2)=1/\pi$;

8) $x^2y'+2xy=-4$, $y(-1)=0$.

546. Конденсатор емкостью $C=10^5$ Пф включается в цепь с сопротивлением $R=10^3$ Ом и напряжением $U=100$ В. В момент включения $(t=0)$ заряд конденсатора был равен нулю.

1) Найдите закон изменения заряда конденсатора.

2) Определите заряд конденсатора через 10 с после замыкания цепи.

3) Сколько времени потребуется, чтобы практически полностью зарядить конденсатор?

547. Цепь с сопротивлением $R=15$ Ом и индуктивностью $L=3$ Гн включена на постоянное напряжение $U=300$ В. 1) Найдите зависимость силы тока от времени, если в момент включения $(t=0)$ сила тока равна нулю. 2) К какому значению приближается сила тока с течением времени? 3) За какое время с момента замыкания сила тока достигнет 99% своей предельной величины?

548. Участок цепи с индуктивностью L и сопротивлением R включается на внешнее напряжение $U=f(t)$. Найдите силу тока в цепи через 5 секунд, если в момент включения сила тока равна нулю и:

1) $L=2$ Гн, $R=4$ Ом, $f(t)=20e^{-3t}$; 2) $L=2$ Гн, $R=4$ Ом, $f(t)=U_0$.

549*. Докажите, что в цепи с индуктивностью L, сопротивлением R, содержащей источник тока, напряжение которого меняется по закону $U=U_0 \sin t$, сила тока меняется периодически.

§ 15. Дифференциальные уравнения второго порядка

50. Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка. Многие дифференциальные уравнения второго порядка можно записать в виде

$$y''=f(x, y, y') \text{ или } \frac{d^2 y}{dx^2}=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Простейшим дифференциальным уравнением второго порядка является уравнение

$$y''=f(x).$$

Его решения можно получить путем двукратного интегрирования.

Пример 1. Решить уравнение

$$y''=e^{2x}+\sin x.$$

□ Так как $y''=(y')'$, то, интегрируя правую часть уравнения, имеем

$$y'=\int(e^{2x}+\sin x)\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}-\cos x+C_1.$$

Интегрируя еще раз, получим все решения данного уравнения:

$$y=\frac{1}{4}e^{2x}-\sin x+C_1 x+C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. ■

Множество решений дифференциального уравнения второго порядка определяется двумя постоянными. Чтобы выделить единственное решение уравнения, достаточно задать значение функции и ее производной при фиксированном значении аргумента.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющего условиям

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y'_0,$$

где x_0, y_0, y'_0 — заданные числа, называется *задачей Коши.*

Эти условия называются *начальными условиями*, так как с физической точки зрения они означают, что в фиксированный (начальный) момент времени заданы положение материальной точки и ее скорость.

Геометрический смысл задачи Коши состоит в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку и имеющей заданный угловой коэффициент касательной в этой точке.

Пример 2. Решить задачу Коши:

$$x''=2, \quad x(1)=0, \quad x'(1)=4.$$

□ Найдем решения данного уравнения:

$$x'=2t+C_1, \quad x=t^2+C_1t+C_2.$$

Воспользовавшись начальными условиями, определим значения констант C_1 и C_2 из системы уравнений

$$1+C_1+C_2=0, \quad 2+C_1=4.$$

Следовательно, $C_1=2$, $C_2=-3$ и искомое решение

$$x=t^2+2t-3. \ ■$$

Дифференциальные уравнения вида

$$y''=f(x, y')$$

заменой $y'=v$ сводятся к уравнениям первого порядка.

Пример 3. Решить уравнение

$$y''=-2y'^2.$$

□ Сделав в уравнении замену $y'=v$, имеем

$$v'=-2v^2.$$

Решив полученное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, найдем v:

$$v=1/(2x+C_1).$$

Следовательно, искомое решение

$$y=\int\frac{1}{2x+C_1}\,dx=\frac{1}{2}\ln|2x+C_1|+C_2. \ ■$$

550. Решите уравнения:

1) $y''=2$; 2) $\frac{d^2y}{dx^2}=-2x$; 3) $\frac{d^2s}{dt^2}=1-2\sin t$;

4) $y''=e^{2t}$; 5) $y''=\cos^2 x$; 6) $y''=\frac{1}{2}e^{-x}$;

7) $mx''=\cos\omega t$; 8)* $e^{y''}=1$; 9)* $\ln y''=0$.

551. Составьте дифференциальное уравнение, решениями которого являются функции:

1) $y=\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2$;

2) $x=\cos 2t+C_1t+C_2$.

552. Решите задачу Коши:

1) $\frac{d^2s}{dt^2}=6t-4$, $s(2)=5$, $\frac{ds}{dt}(2)=6$;

2) $y''=12x^2$, $y(1)=1$, $y'(1)=4$;

3) $y''=e^{3x}+2x$, $y(0)=y'(0)=0$;

4) $x''=\sin 2t$, $x(0)=x'(0)=0$.

553. Из семейства интегральных кривых уравнения $y''=6(1-x)$ выделите ту, которая в точке (1; 5) имеет касательную с углом наклона к оси x, равным $\pi/4$.

554. Ускорение тела, движущегося прямолинейно, изменяется по закону $a=12t-1$, где a — ускорение, м/с^2; t — время, с. Начальное положение $x(0)=0$ и начальная скорость $v(0)=10$ м/с.

1) Составьте дифференциальное уравнение движения.

2) Найдите закон движения точки.

3) Определите положение точки и ее скорость через 3 с после начала отсчета времени.

4) Найдите момент времени, когда скорость будет наименьшей.

5)* Через какое время точка удалится от начала координат на 2,5 единицы?

555. Тело массой $m=4$ кг под действием постоянной силы $F=6$ Н начало двигаться из начала координат со скоростью v_0.

1) Составьте дифференциальное уравнение движения.

2) Найдите закон движения тела.

3) Определите начальную скорость тела, если за 10 с тело переместилось в точку $x=95$.

4) Найдите положение тела через 10 мин.

5) Через какое время тело достигнет точки $x=125$?

6) Может ли тело вернуться в начальное положение?

556. Локомотив движется по горизонтальному участку пути со скоростью $v_0=20$ м/с. При торможении сопротивление движению пропорционально массе

локомотива с коэффициентом пропорциональности 0,2. Определите:

1) через какое время от начала торможения он остановится;

2) путь, пройденный локомотивом от начала торможения до остановки.

557. Заряженная частица единичной массы начинает двигаться в переменном однородном электрическом поле. Действующая на частицу сила в направлении ее движения изменяется по закону $F=3\cos 5t$, где F — сила, Н; t — время, с.

1) Найдите закон движения частицы, выбрав в качестве начала координат точку, в которой находилась частица в начале движения.

2) На какое примерно расстояние от начального положения частица удалится через 100 с?

3) Вернется ли частица через некоторое время в начальное положение?

4) Может ли частица удалиться от начального положения на 10 единиц?

558. К одному концу балки длиной l, второй конец которой жестко закреплен, приложена сила P. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид $y''=kP(l-x)$, где x — расстояние до закрепленного конца, м; k — коэффициент, характеризующий балку, $\text{Н}^{-1}\ \text{м}^{-2}$.

1) Найдите уравнение изогнутой оси балки.

2) Определите величину прогиба, т. е. ординату изогнутой оси свободного конца балки, если $P=10^3$ Н, $l=6$ м, $k=10^{-5}\ \text{Н}^{-1}\,\text{м}^{-2}$.

3) На каком расстоянии от закрепленного конца прогиб балки будет наибольший?

559. Решите уравнение:

1) $x''=-x'$; 2) $x''=-x'^2$;

3) $\frac{d^2y}{dx^2}=-0{,}1\,y'$; 4) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}y'^2$;

5) $x''=2x'-10$; 6) $x''=-x'-10$.

560. Найдите решение задачи Коши:

1) $x''=-2x'$, $x(0)=0$, $x'(0)=2$;

2) $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x+2}\frac{dy}{dx}$, $y(2)=2$, $\frac{dy}{dx}(2)=8$;

3) $s''=-\frac{1}{t}s'$, $s(1)=2$, $s'(1)=1$.

561. Тело массой $m=20$ кг замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорци-

ональной скорости. Коэффициент пропорциональности $k=0,7$ и в начале замедления движения скорость равнялась 1,4 м/с.

1) Найдите закон движения тела.

2) Определите путь, пройденный телом за 10 с от начала замедления движения.

3) Какой примерно путь пройдет тело от начала замедления до остановки?

4) Через какое время тело практически не будет двигаться?

562. Тело массой $m=100$ кг замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости. Коэффициент пропорциональности $k=0,3$ и в начале замедления движения скорость равнялась 40 м/с.

1) Найдите закон движения тела.

2) Определите путь, пройденный телом от начала замедления до момента, когда скорость будет равна 1 м/с.

3) Через какое примерно время тело практически остановится?

51. Уравнение гармонических колебаний. К дифференциальным уравнениям второго порядка приводит описание колебательных процессов. Гармонические колебания, например малые колебания маятника, описываются *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*

$$x''+\omega^2 x=0,$$

где ω - циклическая или круговая частота гармонических колебаний.

Решения уравнения гармонических колебаний можно записать в виде

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

563. Решите уравнение:

1) $x''+16x=0$; 2) $\varphi''+13\varphi=0$;

3) $s''+0,04s=0$; 4) $y''+\frac{1}{9}y=0$.

564. Найдите решение, удовлетворяющее начальным условиям:

1) $y''+4y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=2$;

2) $x''+25x=0$, $x(0)=-3\sqrt{3}$, $x'(0)=5$;

3) $y''+9y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

4) $x''+\frac{1}{4}x=0$, $x(0)=2$, $x'(0)=2\sqrt{3}$.

565. Докажите, что решения уравнения $y''+\omega^2 y=0$ можно представить в виде $y=A\cos(\omega t+\varphi)$, где A и φ — произвольные постоянные.

566. Составьте дифференциальное уравнение гармонических колебаний, решением которого является функция:

1) $y=3\sin(2x-\pi/4)$;
2) $x=2\cos(\pi/5-4t)$;
3) $y=\cos 2t+\sin 2t$;
4) $x=2\cos 9t-\sin 9t$.

567. Тело массой m закреплено на пружине (рессоре). Считая, что на него действует только сила упругости $F=-ky$, где $k>0$ — коэффициент пропорциональности, y — положение тела на оси, найдите закон движения тела, если в начальный момент $t=0$ тело находилось в положении y_0 и имело скорость v_0.

568. Заряженный конденсатор емкостью C замкнут на катушку с индуктивностью L. Найдите закон изменения заряда на конденсаторе, если в момент замыкания $t=0$ заряд равен Q_0.

52. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Уравнение вида

$$y''+py'+qy=0,$$

где p и q — некоторые действительные числа, называется *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Функция вида $y=e^{kx}$ является решением рассматриваемого уравнения тогда и только тогда, когда число k является корнем квадратного уравнения

$$k^2+pk+q=0,$$

которое называется *характеристическим уравнением.*

Решения уравнения в зависимости от значений корней k_1 и k_2 характеристического уравнения имеют следующий вид:

$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$,
если k_1, k_2 — действительны и $k_1\neq k_2$;

$y=(C_1+C_2x)e^{k_1x}$, если $k_1=k_2$;

$y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx)$, если $k_1=a+bi$, $k_2=a-bi$.

569. Являются ли данные функции решениями данного уравнения:

1) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$, $y''+2y'+2y=0$;

2) $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}$, $y''+6y'+9y=0$;
3) $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$, $y''-2y'+2=0$?

570. Составьте линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, если:

1) характеристическое уравнение имеет вид
а) $k^2+3k+2=0$;
б) $2k^2-3k-5=0$;
в) $k^2-1=0$;
2) известны корни его характеристического уравнения
а) $k_1=4$, $k_2=-2$;
б) $k_1=k_2=-2$;
в) $k_{1,2}=5\pm 2i$;
3) его решения имеют вид
а) $y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$;
б) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$;
в) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$,
г) $y=e^x(C_1\cos x-C_2\sin x)$.

571. Решите уравнения:
1) $y''+3y'=0$;
2) $y''-2y'-8y=0$;
3) $y''+14y'+49y=0$;
4) $y''+6y'+25y=0$;
5) $y''+8y'+15y=0$;
6) $y''-2y=0$.

572. Решите задачу Коши:
1) $y''-2y'=0$, $y(0)=3/2$, $y'(0)=1$;
2) $y''+3y'+2y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=3$;
3) $y''+8y'+16y=0$, $y(0)=y'(0)=1$;
4) $y''+9y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=6$;
5) $y''+2y'+5y=0$, $y(0)=y'(0)=1$;
6) $y''-y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$;
7) $y''+4y'+4y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$;
8) $y''-8y'+20y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=8$.

573. На тело массой $m=0{,}2$ кг, закрепленное на пружине, действует упругая сила, пропорциональная смещению тела с коэффициентом $k_1=175$ Н/м, и сила сопротивления среды, пропорциональная скорости с коэффициентом $k_2=12$Н·с/м. Найдите закон движения тела, если в момент $t=0$ тело покоилось.

574. Колебательный контур содержит индуктивность $L=0{,}1$ Гн, сопротивление $R=2$ Ом и емкость $C=0{,}01$ Ф. Найдите зависимость изменения заряда на конденсаторе от времени, если в момент замыкания контура заряд равен Q_0.

Глава 7

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 16. Случайные события

53. Статистическое определение вероятности. Исходными понятиями теории вероятностей являются понятия случайного опыта, случайного события и вероятности случайного события.

Термин «случайный опыт» или «случайный эксперимент» используется для описания любого действия, которое можно повторить большое число раз в одинаковых условиях и результаты которого нельзя предугадать заранее. Примерами случайных опытов могут служить однократное или двукратное подбрасывание монеты, подбрасывание шестигранной игральной кости, стрельба по мишени и др.

Пусть A — один из возможных результатов эксперимента. Будем называть его также случайным событием.

Примеры. Выпадение любой фиксированной цифры от 1 до 6 при подбрасывании игральной кости; выпадение герба не менее одного раза при двух бросаниях монеты; непопадание в цель при одном выстреле и др.

Относительной частотой случайного события A называется отношение $\frac{n(A)}{n}$ числа $n(A)$ экспериментов, в которых произошло событие A, к числу n всех экспериментов.

Если относительная частота события A в сериях из n опытов при достаточно большом n колеблется около одного и того же числа p, то такие опыты называются *статистически устойчивыми*, а число p — *вероятностью события* A.

Теория вероятностей имеет дело только со статистически устойчивыми экспериментами.

Когда говорят, что вероятность некоторого события равна, например, 0,56, то это практически означает, что в среднем в каждых 100 опытах это событие наступит примерно 56 раз.

575. Для контроля качества продукции одного завода из каждой партии готовых изделий выбирают для проверки 100 деталей. Проверку не выдерживают в среднем 8 изделий. Равной чему можно принять вероятность того, что наугад взятое изделие этого завода будет качественным? Сколько примерно бракованных изделий будет в партии из 10 000 единиц? Как оценить вероятность выпуска качественного изделия после изменения технологии производства?

576. На некотором предприятии было замечено, что при определенных условиях в среднем 1.6% изготовленных предметов оказывают не удовлетворяющими стандарту и идут в брак. Сколько примерно непригодных изделий будет в партии из 1000 изделий?

577. Вероятность того, что размеры детали, выпускаемой станком-автоматом, окажутся в пределах заданных допусков, равна 0,96. Какое количество годных деталей в среднем будет содержаться в каждой партии объемом 500 штук?

578. Для проверки на всхожесть было посеяно 200 семян, из которых 170 проросло. Равной чему можно принять вероятность прорастания отдельного семени в этой партии? Сколько семян в среднем взойдет из каждой тысячи посеянных? Как оценить вероятность прорастания семени для другой партии семян?

579. Выполните следующий эксперимент: бросьте две монеты одновременно 50 раз. Подсчитайте число наступлений следующих исходов: два герба, один герб и одна цифра, две цифры. Вычислите частоту каждого из этих исходов. Подтверждают ли ваши вычисления гипотезу о том, что исходы равновозможны?

54. Вероятностная модель случайного опыта. Приведенное в п. 53 эмпирическое определение статистической устойчивости и вероятности события характеризует естественно-научное содержание понятия вероятности, но не является его формальным определением. Рассмотрим другое определение вероятности, связанное с построением математической модели эксперимента, в которой отражены все его возможные исходы.

Вместе с каждым случайным опытом рассматривается некоторое множество U, элементами которого являются предполагаемые исходы данного опыта, взаимно исключающие друг друга. Множество U называется *пространством элементарных исходов* (ПЭИ), а его элементы — *элементарными исходами.*

Пример 1. Бросается игральная кость. $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, где каждая цифра означает число выпавших очков.

Пример 2. Дважды бросается монета. $U=\{$ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ$\}$. Здесь, например, ГЦ означает, что при первом бросании выпал герб, при втором — цифра.

Пример 3. Стрелок, имея 4 патрона, стреляет до первого попадания в цель. $U=\{$П, НП, ННП, НННП, НННН$\}$. Здесь «НП» означает, что стрелок при первом выстреле не попал, а при втором — попал в цель.

Под *случайным событием* понимают произвольное подмножество (часть) ПЭИ.

В примере 1 событие $A=\{2, 4, 6\}$ состоит в том, что выпало четное число очков; в примере 2 событие A — «герб выпал по крайней мере один раз» составлено из исходов ГГ, ЦГ, ГЦ.

Событие, наступающее при любом исходе эксперимента, называется *достоверным*. Это событие совпадает со всем множеством U.

Событие, не наступающее ни при одном исходе опыта, называется *невозможным*. Это событие совпадает с пустым множеством V.

Событие $\bar{A}$, наступающее тогда и только тогда, когда A не наступает, называется *противоположным* A. Так, в примере 1 событием, противоположным $A=\{2, 4, 6\}$, является событие $\bar{A}=\{1, 3, 5\}$, состоящее в том, что выпало нечетное число очков.

В опыте с подбрасыванием игральной кости ввиду симметричности ее у каждой из шести граней равные шансы оказаться сверху, а именно один шанс из шести. Поэтому естественно считать вероятность выпадения любого фиксированного числа очков равной 1/6. В ПЭИ примера 2 также естественно принять, что исходы равновозможны и вероятность каждого исхода считать равной 1/4. Однако не всегда есть основания считать исходы опыта равновозможными. Например, ПЭИ опыта, состоящего в одном выстреле по мишени, содержит два, вообще говоря, неравновозможных исхода. Их вероятности в этом случае можно принять равными относительным частотам соответствующих исходов при большом числе повторений опыта.

Пусть каждому элементарному исходу u_i из $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ поставлено в соответствие некоторое число $p_i=\mathrm{P}(u_i)$, называемое *вероятностью* элементарного исхода, которое удовлетворяет условиям: 1) $0<p_i<1$ для

всех i; 2) $p_1+p_2+...+p_n=1$. Тогда вероятностью события A называется сумма вероятностей элементарных исходов, образующих это событие.

580. Из четырех карточек с номерами 1, 2, 3, 4 последовательно наугад выбирают две. Опишите ПЭИ этого опыта, если элементами его служат: 1) наборы номеров двух извлеченных карточек; 2) двузначные числа, образованные из номеров извлеченных карточек; 3) суммы номеров извлеченных карточек.

581. Селекционер скрещивает две породы, каждая из которых обладает парой генов (a, A). Каждая из родительских особей передает потомку один из этих генов (либо a, либо A). Два гена — один отцовский и один материнский — составляют пару генов потомка. Опишите ПЭИ, элементами которого являются пары генов возможных потомков.

582. Из трех мужчин (Олег, Игорь, Владимир) и двух женщин (Елена, Галина) избирается комиссия в составе двух человек. Опишите ПЭИ этого эксперимента.

583. Монета бросается до тех пор, пока либо выпадет герб, либо четыре раза подряд выпадет цифра. Опишите ПЭИ этого эксперимента.

584. Правильная монета подбрасывается дважды.

1) Опишите ПЭИ этого опыта и события: A — «цифра выпала при первом подбрасывании»; B — «цифра выпала точно один раз»; C — «выпал ровно один герб»; D — «герб выпал хотя бы один раз»; E — «результаты опыта одинаковы при обоих подбрасываниях».

2) Опишите словесно события $F=\{ЦЦ, ЦГ, ГЦ\}$; $G=\{ГГ, ГЦ\}$.

3) Введите вероятности элементарных исходов.

4) Найдите вероятности событий A, B, C, D, E.

585. В ПЭИ $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ заданы вероятности

$$P(1)=1/4;\ P(2)=1/12;\ P(3)=1/3;$$
$$P(4)=1/6;\ P(5)=1/12;\ P(6)=1/12.$$

Что можно сказать о примерном числе появлений каждого исхода в 120 опытах? Найдите вероятности событий $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{1, 2\}$, $\bar{B}$.

586. Из цифр от 1 до 9 включительно наугад выбирается одна. Опишите ПЭИ и найдите вероятность

того, что выбранное число будет: 1) четным; 2) нечетным; 3) простым; 4) бо́льшим 7.

587. Опыт состоит в подбрасывании игральной кости дважды.

1) Опишите ПЭИ этого опыта, если его элементами служат упорядоченные пары выпавших очков.

2) Назовите элементы ПЭИ, составляющие события: A — «оба раза выпало одинаковое число очков»; B — «сумма очков равна 7», C — «хотя бы на одной кости выпала 1»; D — «сумма очков делится на 3».

3) Опишите словесно события

$$E=\{(1;\ 1);\ (1,2);\ (2,1)\},\quad F=\{(4,6);\ (5,5);\ (6,4)\}.$$

4) Введите элементарные вероятности, считая равновозможным выпадение любой пары очков, и найдите вероятности событий A, B, C, D, E, F.

588. Игральная кость бросается дважды. 1) Опишите ПЭИ этого опыта, если его элементами служат суммы выпавших очков. 2) Введите элементарные вероятности, считая равновозможным выпадение любой пары очков. 3) Найдите вероятности событий G — «сумма очков больше 10»; H — «сумма очков делится на 2».

589. Производится опрос, связанный с изучением интереса учащихся к литературе. Каждому из опрашиваемых было задано два вопроса:

Читаете ли Вы литературно-художественные журналы?

Читаете ли Вы произведения классиков?

Оказалось, что 40% опрошенных положительно ответили на оба вопроса, 30% положительно на первый и отрицательно на второй; 20% — отрицательно на первый и положительно на второй; 10% — отрицательно на оба вопроса.

Постройте ПЭИ опыта, заключающегося в опросе одного учащегося. Введите элементарные вероятности. Найдите вероятность того, что наудачу выбранный учащийся читает: 1) литературно-художественные журналы; 2) произведения классиков.

590. Длительными наблюдениями установлено, что у рабочего в течение рабочего дня может быть не более двух бракованных деталей. При этом в течение 100 рабочих дней брака не было примерно в 60 случаях, одна бракованная деталь была в 30 случаях, две — в 10 случаях. Постройте ПЭИ опыта, заключающегося в контроле работы рабочего в течение суток. Введите элементарные вероятности. Вычислите веро-

ятность того, что среди изготовленных рабочим за сутки деталей бракованных будет: 1) хотя бы одна; 2) менее двух.

591. Круглая мишень разделена на три равных сектора. Она установлена так, что может вращаться вокруг оси. При достаточно большой угловой скорости вращения мишени стрелок не в состоянии различить цифры, выписанные на секторах, и поэтому он стреляет наугад. При любом выстреле он попадает в мишень. Постройте ПЭИ и введите элементарные вероятности для: 1) одного выстрела; 2) двух выстрелов.

55. Классическое определение вероятности. Если ПЭИ опыта состоит из N равновозможных исходов, то

$$\mathsf{P}(A)=\frac{1}{N}+\ldots+\frac{1}{N},$$

где число слагаемых $N(A)$ равно числу элементарных исходов, составляющих событие A, т. е.

$$\mathsf{P}(A)=N(A)\cdot\frac{1}{N}.$$

Это равенство обычно называют *классическим определением вероятности.*

Если в задаче говорится, что выбор производится наугад, наудачу, случайным образом, то это означает, что его элементарные исходы равновозможны.

Задачи на вычисление вероятности события целесообразно решать по следующей схеме:

1) по условию задачи выяснить, что собой представляет случайный опыт и его исходы;

2) построить ПЭИ опыта;

3) приписать вероятности элементарным исходам. Если из условия задачи следует, что исходы равновозможны, то, сосчитав их число N, элементарные вероятности положить равными $1/N$;

4) выяснить, какие элементарные исходы составляют событие A (благоприятствуют событию A). Если исходы равновозможны, то подсчитать число благоприятствующих исходов $N(A)$;

5) определить вероятность события A, сложив вероятности элементарных исходов, составляющих его. В классическом случае вычислить

$$\mathsf{P}(A)=N(A)\cdot\frac{1}{N}.$$

Реализация первых трех этапов завершает построение вероятностной модели опыта.

Пример. Из цифр от 1 до 9 включительно наугад выбирается одна. Найти вероятность того, что выбранное число будет простым.

□ Опыт состоит в выборе наугад одной цифры из девяти. ПЭИ опыта $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; исходы равновозможны, $N=9$, поэтому $p_i=1/9$, $i=1, 2, \ldots, 9$.

$$A=\{2, 3, 5, 7\}; \quad N(A)=4; \quad \mathrm{P}(A)=4/9. \blacksquare$$

592. В ящике 10 белых и 15 черных шаров (шары одинаковые во всем за исключением цвета). Извлекается наудачу один шар. Опишите ПЭИ этого опыта и найдите вероятность того, что вынутый шар окажется белым.

593. Совхоз получает 30% тракторов из г. Харькова. Какова вероятность того, что наугад выбранный трактор изготовлен не в Харькове?

594. В ящике в 5 раз больше красных шаров, чем черных (шары одинаковые во всем за исключением цвета). Наугад вынимается один шар. Найдите вероятность того, что он будет красным.

595*. Число N животных в стаде неизвестно. Из этого стада наугад отбирают M животных, которые клеймятся и возвращаются в стадо. Затем отбирается n животных, среди которых m оказываются клеймеными. Укажите приближенное значение величины N.

596. Выпущено 100 лотерейных билетов, причем установлено 11 денежных призов, из них 8 по 1 руб, 2 — по 5 руб и 1 — 10 руб. Некто купил 25 билетов, три из них принесли ему выигрыш по 1 руб. и один — 5 руб. Остальные оказались безвыигрышными. Найдите вероятность и относительную частоту события:

1) «купленный билет безвыигрышный»;

2) «на купленный билет выпал выигрыш 1 руб.»;

3) «на купленный билет выпал выигрыш 5 руб.»;

4) «на купленный билет выпал выигрыш 10 руб.». Сравните вероятности этих событий с их относительными частотами.

56. Элементы комбинаторики. При вычислении вероятностей важную роль играют методы комбинаторики.

Основное правило комбинаторики. Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе

n_2 способами, третье n_3 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Рассмотрим опыт, состоящий в выборе наудачу одного за другим r шаров из n пронумерованных шаров, содержащихся в корзине. Этот опыт будем называть *выбором с возвращением*, если после каждого извлечения шар возвращается обратно. В противном случае он называется *выбором без возвращения*. Номера извлеченных шаров образуют выборку объема r. Если выборки, состоящие из одних и тех же элементов, но отличающиеся порядком следования элементов, представляют различные исходы опыта, то они называются *упорядоченными*, в противном случае — *неупорядоченными*.

Рассмотрим выбор r из n шаров с возвращением. Если ПЭИ этого опыта образовано упорядоченными выборками, то число его элементов в этом случае равно $N=n^r$. Если осуществляется выбор без возвращения, то в случае упорядоченных выборок элементы ПЭИ называются также размещениями из n элементов по r. Их число равно

$$N=n(n-1) \ \ldots \ (n-r+1)$$

и обозначается A_n^r. В случае когда $r=n$, элементы ПЭИ называются перестановками, и число их

$$N=n(n-1) \ \ldots \ 2\cdot 1=n!.$$

Если при выборе без возвращения рассматривать неупорядоченные выборки, то элементы ПЭИ называются сочетаниями из n элементов по r. Число их

$$N=C_n^r=\frac{A_n^r}{r!}.$$

Для числа сочетаний C_n^r справедливы равенства

$$C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad C_n^{n-r}=C_n^r.$$

597. Из города A в город B можно добраться четырьмя дорогами, из B в C ведут две дороги, из C в D — три дороги. Сколькими путями можно добраться: 1) из A в C; 2) из B в D; 3) из A в D?

598. На вершину горы ведет 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на нее и спуститься

вниз? Дайте ответ на тот же вопрос, если подъем и спуск осуществляются различными путями.

599. Металлург, изучающий сплавы, при проведении эксперимента может использовать 3 различных температурных режима, 6 различных значений времени остывания и 4 различных присадки меди. Выбор температурного режима, значения времени остывания и типа присадки полностью определяют эксперимент. На эксперимент уходит один рабочий день. Хватит ли трех месяцев для проведения всей работы, если в месяце 25 рабочих дней?

600. Из корзины, содержащей 4 занумерованных шара, последовательно берут два шара. Определите число элементов ПЭИ этого опыта, если шары в корзину после каждого извлечения: 1) возвращаются; 2) не возвращаются.

601. Из цифр 0, 1, 2, ..., 9 образуются всевозможные двузначные числа. 1) Найдите количество всех чисел. 2) Сколько среди них образовано различными цифрами; одинаковыми? 3) Сколько имеется двузначных чисел, в записи которых обе цифры нечетные, обе цифры четные? 4) Сколько имеется двузначных чисел, в записи которых отсутствует «0» и обе цифры четные?

602. Опишите ПЭИ опыта, состоящего в выборе наудачу 5 шаров из 20 занумерованных шаров в случае, когда: 1) шары выбираются последовательно один за другим с возвращением после каждого извлечения; 2) шары выбирают один за другим, не возвращая; 3) выбирают сразу 5 шаров. Укажите число элементов ПЭИ для каждого случая.

603. В распоряжении агрохимика есть шесть различных типов минеральных удобрений. Он изучает совместное влияние каждой тройки удобрений на опытном участке площадью 1 га. Каковой должна быть площадь всего опытного поля, если все возможные эксперименты проводятся одновременно?

604. Чему равна вероятность того, что наудачу выбранные последовательно 4 цифры: 1) не содержат 0; 2) все различны; 3) образуют четырехзначное число? Если опыт повторить 100 раз, то сколько примерно раз будет задумано четырехзначное число?

605. Каждый из трех пассажиров с равной вероятностью может сесть в любой из 10 вагонов пассажирского поезда. Какова вероятность того, что все трое попадут: 1) в первый вагон; 2) в один вагон; 3) в разные вагоны; 4) в первые 5 вагонов?

606. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляют всевозможные трехзначные числа с неповторяющимися цифрами. Какова вероятность того, что наудачу взятое число: 1) равно 123; 2) будет четным; 3) будет нечетным; 4) делится на 4? Найдите вероятности этих событий, если числа образуются из цифр 0, 1, 2, 3, 5.

607. Среди 50 деталей три нестандартные. Наудачу с возвращением извлекается две детали. Какова вероятность того, что среди них:

1) нет нестандартных;

2) обе нестандартны;

3) в точности одна нестандартна.

608. Магазин принимает партию из 10 радиоприемников, если при проверке двух из них, выбранных наугад, оба оказываются исправными. Какова вероятность того, что магазин примет партию, содержащую 4 неисправных радиоприемника? Можно ли считать удовлетворительной такую процедуру приема товара? Как можно улучшить процедуру приема?

609. В лотерее из 15 билетов 5 выигрышных. Некто купил два билета. Найдите вероятность того, что: 1) оба билета выигрышные; 2) ни один из билетов не выигрышный; 3) среди купленных билетов ровно один выигрышный.

610. Из ящика, содержащего 10 красных и 5 синих шаров, наудачу извлекается 3 шара. Чему равна вероятность того, что: 1) все шары окажутся красными; 2) выбраны только синие шары; 3) выбраны один синий и 2 красных шара; 4) среди выбранных шаров не более двух красных?

611. В ящике имеется M предметов, обладающих некоторым свойством, и N предметов, которые этим свойством не обладают. Из ящика наудачу извлекается k предметов ($k \leqslant M$, $k \leqslant N$). Чему равна вероятность того, что: 1) все извлеченные предметы обладают указанным свойством; 2) ни один из извлеченных предметов этим свойством не обладает; 3) среди извлеченных предметов ровно n $(n \leqslant k)$ обладают указанным свойством?

612. На полку наудачу ставят четырехтомное собрание сочинений М. Ю. Лермонтова. Какова вероятность того, что в начале будет стоять первый том, а в конце — четвертый?

613. Чему равна вероятность того, что два лица A и B окажутся рядом, если они рассаживаются

наудачу вместе с 8 остальными произвольным образом: 1) в ряд из 10 мест; 2) за круглым 10-местным столом?

57. Операции над событиями. Событие C, составленное из тех элементов ПЭИ, которые принадлежат или событию A, или событию B, или A и B вместе, называют *суммой (объединением)* событий A и B и обозначают $C=A+B$ или $C=A\bigcup B$. Другими словами, событие $A\bigcup B$ наступает тогда и только тогда, когда наступает или событие A, или B, или A и B одновременно.

Событие D, составленное из элементов ПЭИ, принадлежащих одновременно и событию A, и событию B, называют *произведением событий* A и B и обозначают $D=AB$ или $D=A\bigcap B$. Иначе говоря, событие $A\bigcap B$ наступает тогда и только тогда, когда наступают и событие A и событие B.

События A и B называются *несовместными*, если $A\bigcap B=V$.

614. В чем заключаются сумма и произведение указанных ниже событий, связанных с соответствующими испытаниями: 1) производится два выстрела по мишени; A — «попадание первым выстрелом»; B — «попадание вторым выстрелом», 2) бросается игральная кость; A — «появление единицы»; B — «появление двойки»; 3) бросается игральная кость; A — «непоявление тройки»; B — «непоявление пятерки»; C — «появление нечетного числа очков»? Опишите все события элементами ПЭИ.

615. В корзинку трижды бросается мяч. Пусть события A_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ состоят в том, что при i-м бросании мяч попадает в корзину. Выразите через A_1, A_2, A_3 событие: 1) B — «мяч не попал в корзину ни разу»; 2) C — «мяч по крайней мере один раз попал в корзину»; 3) H — «мяч попал в корзину при всех бросаниях»; 4) D — «мяч попал в корзину только при первом бросании»; 5) E — «мяч попал в корзину ровно один раз»; 6) F — «мяч попал в корзину только при первом и третьем бросаниях»; 7) G — «мяч попал в корзину ровно два раза».

616. Сделано три выстрела по мишени. Пусть событие A_i — «при i-м выстреле произошло попадание в мишень», $i=1,\ 2,\ 3$. Опишите ПЭИ этого опыта. Считая исходы опыта равновозможными, найдите вероятность события A, предварительно выразив его через A_i, если: 1) A — «произошло три попадания»; 2) A — «не было ни одного попадания»; 3) A — «было хотя бы одно попадание».

617. Игральная кость бросается дважды. Найдите: 1) вероятности событий $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, если A — «сумма выпавших очков четна», B — «выпадет хотя бы одна единица»; 2) вероятность того, что по крайней мере один раз выпадет меньше трех очков.

58. Теорема сложения вероятностей. Для любых событий A и B справедлива *теорема сложения вероятностей:*

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B).$$

Если A и B несовместны, то

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B).$$

618. Завод в среднем дает 27% продукции высшего сорта и 70% первого сорта. Найдите вероятность того, что наудачу взятое изделие будет или высшего, или первого сорта.

619. Станок-автомат производит изделия трех сортов, при этом изделий первого и второго сорта 80% и 15% соответственно. Чему равна вероятность того, что наугад взятое изделие будет или второго, или третьего сорта?

620. В группе 25 студентов, из них отлично учится 5 человек, хорошо 12, удовлетворительно 6 и слабо 2. Преподаватель, не знакомый с группой, вызывает по списку одного из студентов. Определите вероятность того, что вызванный студент или отличник, или хорошист.

621. Стрелок попадает в мишень, разделенную на три непересекающиеся части. Вероятность попадания в первую часть равна 0,45, во вторую — 0,35. Найдите вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает: 1) либо в первую, либо во вторую часть; 2) в третью часть.

622. Пусть A и B — некоторые события в произвольном ПЭИ, причем $\mathsf{P}(A)=0{,}4$, $\mathsf{P}(B)=0{,}3$, $\mathsf{P}(A \cap B) = 0{,}2$. Найдите вероятность события: 1) $A \cup B$; 2) $\bar{A}$; 3) $\bar{B}$; 4)* $\bar{A} \cap B$.

623. Из ящика, содержащего 15 красных и 5 синих шаров, наудачу выбирают 4 шара. Найдите вероятность того, что среди выбранных шаров: 1) все одноцветны; 2) не более одного синего; 3) не менее трех красных; 4) не менее половины красных.

624. ОТК проверяет половину изделий некоторой партии и признает годной всю партию, если среди

проверенных изделий бракованных не более одного. Какова вероятность того, что партия из 20 изделий, в которой 2 бракованные, будет признана годной?

625. Из чисел 1, 2, ..., 20 наудачу выбирается число. Найдите вероятность того, что это число делится на 2, или на 3.

626. В условиях упражнения 589 о статистике читаемой литературы найдите вероятность того, что случайно выбранный человек читает литературно-художественные журналы или произведения классиков.

627.* Докажите, что если события A_1, A_2, ..., A_n попарно несовместны и их объединение есть достоверное событие, то $\mathsf{P}(A_1)+\mathsf{P}(A_2)+\ldots+\mathsf{P}(A_n)=1$.

59. Независимые события. События A и B *независимы* тогда и только тогда, когда

$$\mathsf{P}(A\cap B)=\mathsf{P}(A)\cdot\mathsf{P}(B).$$

Если события A и B независимы, то независимы A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

События A_1, A_2, A_3 *независимы в совокупности*, если они попарно независимы и

$$\mathsf{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)=\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(A_3).$$

События A_1, A_2, A_3, A_4 независимы в совокупности, если независимы в совокупности любые три из них и

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)=\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(A_3)\mathsf{P}(A_4)$$

и т. д.

628. Выясните, будут ли независимыми нижеперечисленные события A и B, связанные со следующими опытами: 1) бросается игральная кость; A — «число выпавших очков не более четырех»; B — «число выпавших очков нечетно»; 2) бросаются две монеты; A — «на первой монете выпал герб», B — «монеты упали одинаково»; 3) игральная кость бросается дважды; A — «при первом бросании не выпало 5 очков», B — «сумма выпавших очков равна 11»; 4) игральная кость бросается дважды; A — «при первом бросании выпало четное число очков», B — «сумма выпавших очков нечетная». Исходы опытов считать равновозможными.

629. Результаты экзаменов в некотором техникуме показывают, что 8% учащихся не смогли сдать математику, 6% — физику и 2% не сдали экзамен как

по физике, так и по математике. Наугад выбирается один учащийся. Будут ли события «выбранный учащийся не сдал математику» и «выбранный учащийся не сдал физику» независимыми?

630. В условиях упражнения 589 о статистике читаемой литературы выясните, зависимы ли события: «Опрошенный читает литературно-художественные журналы» и «Опрошенный читает произведения классиков»?

631. Электрические лампочки производятся на одной автоматической линии. В среднем одна лампочка из тысячи оказывается бракованной. Лампочки изготовляются независимо друг от друга. Чему равна вероятность того, что из двух взятых наугад лампочек: 1) окажутся исправными обе; 2) исправной будет только одна; 3) обе будут бракованными?

632. Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя первого элемента при включении прибора — 0,05; второго — 0,08. Найдите вероятность того, что при включении прибора: 1) выйдет из строя только первый элемент; 2) оба элемента выйдут из строя; 3) откажет только второй элемент; 4) оба элемента будут работать.

633. При каждом включении двигатель начинает работать с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что для запуска двигателя потребуется: 1) ровно два включения; 2) не более двух включений; 3) более трех включений?

634. Дважды подбрасывается трехгранная линейка. На ее гранях стоят числа 1, 2, 3. Эти грани при подбрасывании оказываются внизу с вероятностями 0,5; 0,3; 0,2 соответственно. 1) Постройте ПЭИ этого опыта. 2) Назовите элементы ПЭИ, составляющие события: A — «номера нижних граней совпали при бросаниях», B — «сумма номеров нижних граней больше трех», C — «при первом бросании номер нижней грани больше, чем, при втором», D — «выпали различные номера нижних граней». 3) Опишите словесно события:

$$E=\{(1,1);\ (1,2);\ (2;\ 1)\};$$

$$F=\{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ (2,1);\ (3,1)\}.$$

4) Введите вероятности элементарных исходов, считая исходы двух бросаний независимыми, и вычислите вероятности событий A, B, C, D, E, F.

60. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Если $\mathsf{P}(B)>0$, то *условная вероятность* $\mathsf{P}(A\mid B)$

события A при условии, что событие B произошло, есть число, определяемое формулой

$$\mathsf{P}(A \mid B)=\frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Для опытов с равновозможными исходами

$$\mathsf{P}(A \mid B)=\frac{N(A \cap B)}{N(B)}.$$

События A и B, вероятности которых отличны от 0, являются *независимыми*, если

$$\mathsf{P}(A \mid B)=\mathsf{P}(A) \text{ или } \mathsf{P}(B \mid A)=\mathsf{P}(B).$$

Если $\mathsf{P}(A)>0$, $\mathsf{P}(B)>0$, то

$$\mathsf{P}(A \cap B)=\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B \mid A)=\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(A \mid B)$$

(теорема умножения вероятностей).

При решении задач на теоремы сложения и умножения вероятностей целесообразно использовать следующую схему рассуждений:

1) обозначить все фигурирующие в условии задачи случайные события и выписать вероятности событий, указанных в условии задачи;

2) событие, вероятность которого нужно найти, выразить через события, вероятности которых известны или легко вычисляются с помощью операций сложения, умножения и перехода к противоположному событию;

3) используя теоремы сложения и умножения вероятностей, вычислить искомую вероятность.

Пример. Участок электрической цепи (рис. 71) состоит из трех элементов, каждый из которых работает

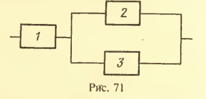


Рис. 71

независимо от других. Элементы не выходят из строя за определенный промежуток времени соответственно с вероятностями $p_1=0,9$ $p_2=p_3=0,7$. Найдите вероятность безотказной работы всего участка.

◻ Обозначим через A_1, A_2, A_3 события, состоящие в том, что 1-й, 2-й, 3-й элемент не выйдет из строя за определенный промежуток времени, B — «участок цепи будет работать безотказно». $\mathsf{P}(A_1)=0{,}9$; $\mathsf{P}(A_2)=0{,}7$; $\mathsf{P}(A_3)=0{,}7$. Участок цепи будет работать безотказно тогда и только тогда, когда не выйдут из строя первый и второй элементы, или не выйдут из строя первый и третий элементы, т. е. $B=(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$. Так как события $A_1 \cap A_2$ и $A_1 \cap A_3$ совместны, то по теореме сложения вероятностей

$$\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(A_1 \cap A_2)+\mathsf{P}(A_1 \cap A_3)-\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

В силу независимости работы всех трех элементов,

$$\mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)+\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_3)-\mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(A_3)=0{,}819. \ \blacksquare$$

Если одно из событий H_1, H_2, ..., H_n обязательно наступает (т. е. событие $H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n$ достоверно) и события H_1, H_2, ..., H_n попарно несовместны, то имеет место так называемая *формула полной вероятности:*

$$\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A \mid H_1)+\mathsf{P}(H_2)\mathsf{P}(A \mid H_2)+ ... + \mathsf{P}(H_n)\mathsf{P}(A \mid H_n).$$

635. Игральная кость бросается дважды. Найдите $\mathsf{P}(A \mid B)$, если: 1) A — «при первом бросании выпадала единица», B — «сумма выпавших очков меньше четырех»; 2) A — «при втором бросании выпала пятерка», B — «сумма очков не меньше 10»; 3) A — «при втором бросании выпало четное число очков», B — «при первом бросании выпало нечетное число очков».

636. В условиях упражнения 589 о статистике читаемой литературы найдите вероятность того, что опрошенный читает литературно-художественные журналы, если он читает произведения классиков.

637. Монета подбрасывается либо до появления герба, либо до трехкратного выпадания цифр. Найдите $\mathsf{P}(A \mid B)$, если: 1) A — «монета брошена два раза», B — «при первом бросании выпала цифра»; 2) A — «монета брошена три раза», B — «при первых двух бросаниях выпала цифра».

638. Из 12 билетов, пронумерованных числами от 1 до 12, наудачу один за другим выбирают два билета. Найдите вероятность того, что: 1) номер

первого билета четный, а второго — нечетный; 2) оба номера четные; 3) оба номера нечетные; 4) один из номеров четный, а другой — нечетный; 5) хотя бы один номер четный; 6) второй номер четный.

639. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых, проезжающих по тому же шоссе, как 3:2. Известно, что в среднем одна из 30 грузовых и 2 из 50 легковых машин подъезжают к бензоколонке для заправки. Чему равна вероятность того, что: 1) к бензоколонке подъехала грузовая машина, и она будет заправляться; 2) к бензоколонке подъехала легковая машина, и она будет заправляться; 3) подъехавшая к бензоколонке машина будет заправляться?

640. С первого станка на сборку поступает 40%, со второго — 30%, и с третьего — 30% всех деталей. Вероятность изготовления бракованной детали для каждого станка соответственно равна 0,01; 0,03; 0,05. Найдите вероятность того, что наудачу поступившая на сборку деталь бракована.

641. На некоторой фабрике машина A производит 40% продукции, а машина B производит 60% продукции. В среднем 9 единиц из 1000 единиц продукции, произведенных машиной A, и одна единица из 250 у машины B оказываются бракованными. Какова вероятность того, что единица продукции, выбранная случайным образом из всей дневной продукции фабрики, оказалась бракованной?

642. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, вынуты наудачу два шара и переложены в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Из второй урны наудачу выбирают шар. Чему равна вероятность того, что он белый?

§ 17. Случайные величины

61. Случайная величина. Закон ее распределения. *Случайной величиной* называется числовая функция, определенная на пространстве элементарных исходов. Функция, ставящая в соответствие каждому значению x случайной величины X вероятность $\mathsf{P}(X=x)$, с которой она принимает это значение, называется *законом распределения случайной величины*.

Можно предложить следующую схему составления закона распределения случайной величины.

1. Построить для данного эксперимента пространство элементарных исходов и задать в нем вероятности.

2. Выписать значения случайной величины, соответствующие каждому элементарному исходу.

3. Выписать всевозможные различные значения x_1, x_2, ..., x_n случайной величины и соответствующие им вероятности p_1, p_2, ..., p_n. Вероятность p_i находится сложением вероятностей всех элементарных исходов, отвечающих значению x_i.

Так как события $(X=x_1)$, ..., $(X=x_n)$ попарно несовместны и одно из них обязательно наступает, то $p_1+p_2+...+p_n=1$. Это равенство используется для проверки правильности составления закона распределения случайной величины.

Пример. Стрелок, имея 4 патрона, стреляет до первого попадания в цель. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Построить закон распределения числа использованных патронов.

□ ПЭИ опыта $U=\{$П; НП; ННП; НННП; НННН$\}$. Так как результат каждого следующего выстрела естественно считать не зависящим от предыдущего, то вероятности элементарных исходов соответственно равны $\mathrm{P}(\text{П})=0{,}6$; $\mathrm{P}(\text{НП})=0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}24$; $\mathrm{P}(\text{ННП})=0{,}4^2\cdot 0{,}6=0{,}096$; $\mathrm{P}(\text{НННП})=0{,}4^3\cdot 0{,}6=0{,}0384$; $\mathrm{P}(\text{НННН})=0{,}4^4=0{,}0256$. Элементарным исходам соответствуют следующие значения случайной величины — числа использованных патронов: 1, 2, 3, 4, 4.

Итак, закон распределения имеет вид

x_i	1	2	3	4
p_i	0,6	0,24	0,096	0,064

$(0{,}064=0{,}0384+0{,}0256)$. ■

643. Возможные значения случайной величины X таковы: $x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=8$. Известны вероятности $\mathrm{P}(X=2)=0{,}4$; $\mathrm{P}(X=5)=0{,}15$. Найдите $\mathrm{P}(X=8)$.

644. Случайная величина X распределена по закону

x_i	1	2	3	4	5
p_i	1/4	1/8	1/4	1/8	1/4

Найдите: 1) $\mathrm{P}(X\leqslant 3)$; 2) $\mathrm{P}(2\leqslant X<5)$; 3) $\mathrm{P}(1\leqslant X<4)$; 4) $\mathrm{P}(X>2)$.

645. Дан закон распределения случайной величины

x_k	1	2	3	4	5
p_k	$1{,}5a^2$	a^2	a	a	0,5

Найдите: 1) a; 2) $\mathrm{P}(X \geqslant 3)$; 3) $\mathrm{P}(X < 4)$; 4) наибольшее значение k, при котором $\mathrm{P}(X \geqslant k) > 0{,}75$.

646. На рис. 72 изображены графики законов распределения случайных величин X и Y соответственно. 1) Запишите законы распределения в виде таблиц. 2) Укажите значения случайных величин, имеющие наибольшую вероятность. 3) Найдите $\mathrm{P}(X=3)$, $\mathrm{P}(X>3)$, $\mathrm{P}(X \leqslant 3)$, $\mathrm{P}(X<3)$. 4) Найдите $\mathrm{P}(Y=2)$, $\mathrm{P}(Y>2)$, $\mathrm{P}(Y \leqslant 2)$, $\mathrm{P}(Y<2)$.

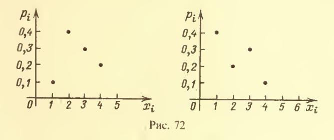


Рис. 72

647. Составьте закон распределения: 1) числа попаданий мячом в корзину при одном броске, если вероятность попадания при каждом броске 0,7; 2) числа выпавших очков при подбрасывании игральной кости; 3) числа выпавших гербов при трех бросаниях монеты; 4) количества делителей натурального числа, выбранного наугад из чисел от 1 до 10.

648. Выпущено 500 лотерейных билетов, причем 40 билетов принесут их владельцам выигрыш по 1 руб., 10 билетов — по 5 руб., 5 билетов — по 10 руб. Остальные билеты безвыигрышные. Найдите закон распределения выигрыша для владельца одного билета.

649. В условиях упражнения 590 составьте закон распределения числа бракованных деталей, изготавливаемых рабочим за: 1) одни сутки; 2) двое суток.

650. В условиях упражнения 591 при попадании в сектор 1 стрелок получает 10 коп, в сектор 2 — 20 коп, в сектор 3 — 40 коп. За право стрелять один раз стрелок платит 25 коп. Составьте закон распределения чистого

выигрыша стрелка: 1) при одном выстреле; 2) при двух выстрелах.

651. Производятся независимые испытания, в каждом из которых с вероятностью 0,6 может произойти событие A. Испытания проводятся до первого появления события A, общее число испытаний не превосходит четырех. Найдите: 1) закон распределения числа испытаний; 2) вероятность того, что будет проведено более двух испытаний.

652. Стрелок, имея три патрона, стреляет до первого попадания в цель. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,7. Найдите закон распределения числа произведенных выстрелов.

653. Урна содержит 5 черных и 10 красных мячей. Вынимается наудачу два мяча. Составьте закон распределения числа извлеченных черных мячей.

654. В сборной команде техникума по стрельбе 16 человек, из них 6 перворазрядников. Наудачу выбирают двух членов сборной. Составьте закон распределения чисел перворазрядников среди выбранных.

655*. Учащийся должен определить дату каждого из трех исторических событий: восстания Степана Разина, крестьянской войны Пугачева и восстания декабристов, пользуясь списком из трех дат: 1667 г., 1773 г., 1825 г. Не зная правильного ответа, он подбирает даты наугад. Составьте закон распределения числа правильно названных дат. Найдите вероятность того, что ученик угадает хотя бы одну дату.

62. Формула Бернулли. *Испытаниями Бернулли* называются последовательные опыты, удовлетворяющие следующим условиям: 1) число опытов фиксировано; 2) каждый опыт приводит к одному из двух взаимно исключающих исходов, которые условно называют «успех» и «неудача»; 3) вероятности «успеха» от испытания к испытанию не меняются; 4) опыты независимы.

Вероятность того, что в n испытаниях Бернулли «успех» наступит ровно m раз, равна

$$\mathrm{P}_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где p — вероятность «успеха» в каждом испытании, $q = 1 - p$ $(m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

О случайной величине числе «успехов» в n испытаниях Бернулли — говорят, что она имеет *биномиальное распределение с параметрами* n и p.

656. На испытательный стенд поставлено 4 конденсатора. Вероятность пробоя конденсатора до истечения 1000 часов равна 0,01. Найдите вероятность того, что в течение испытания откажет: 1) ровно 3 конденсатора; 2) не более одного конденсатора; 3) хотя бы один конденсатор.

657. Вратарь парирует в среднем 0,3 всех одиннадцатиметровых штрафных ударов. Какова вероятность того, что он возьмет ровно два из четырех мячей?

658. Что вероятнее выиграть у равносильного противника: 3 партии из 4 или 5 из 8?

659. Из 10 выстрелов стрелок поражает цель в среднем 8 раз. Какова вероятность того, что из трех независимых выстрелов он точно два раза попадет в цель?

660. Бросается 5 симметричных монет. Какова вероятность того, что: 1) выпало ровно 3 герба; 2) выпало более одного герба? 3) выпал хотя бы один герб?

661. Промышленная продукция определенного вида изготавливается крупными партиями. Из каждой партии случайным образом выбирается 20 изделий. Партия принимается, если выборка содержит не более трех дефектных изделей. Какова вероятность принятия партии, если в процессе производства в среднем 10% изделий получаются дефектными?

662. Стрелок производит три независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,9. Составьте закон распределения числа попаданий.

663. Устройство состоит из трех взаимно независимых элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составьте закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте. Вычислите вероятность того, что отказавших элементов будет не менее двух.

664. Урна содержит один красный и два белых шара, одинаковые во всем, кроме цвета. Из урны извлекаются три шара так, что перед извлечением следующего шара предыдущий возвращается в урну. Найдите закон распределения числа белых шаров среди извлеченных.

665. При трех испытаниях Бернулли вероятность ровно двух «успехов» в 12 раз больше вероятности трех «успехов». Найдите вероятность «успеха» в каждом испытании.

666. Проводится три испытания Бернулли, вероятность наступления «успеха» в каждом испытании равна p. Докажите, что вероятность того, что число успехов равно 1 или 2, равна $3p(1-p)$.

667*. Сколько надо произвести независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,9 хоть один раз попасть в цель, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7?

668*. Какова должна быть вероятность попадания при каждом из 10 независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,9 имело место хотя бы одно попадание?

669. Пользуясь средствами дифференциального исчисления, найдите значение p, при котором вероятность $\mathsf{P}_3(2)$ достигает максимума, и вычислите этот максимум.

63. Математическое ожидание случайной величины. Пусть случайная величина X имеет закон распределения:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

где $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ — всевозможные значения случайной величины, а $p_i=\mathsf{P}(X=x_i)$, $i=1, \ldots, n$. Сумма произведений значений случайной величины на соответствующие вероятности называется *математическим ожиданием* или *средним значением случайной величины* X и обозначается $\mathsf{M}X$:

$$\mathsf{M}X=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Пусть в выборке из n наблюдений за случайной величиной X эта величина n_1 раз принимала значение x_1, n_2 раз — значение x_2, ..., n_m раз — значение x_m, $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$. *Выборочным средним* называется величина

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{m} x_i \frac{n_i}{n}.$$

При достаточно большом числе наблюдений

$$\bar{x}\approx \mathsf{M}X.$$

670. Случайная величина X имеет закон распределения:

1)

x_i	1	2	3
p_i	0,7	0,1	0,2

;

2)

x_1	−2	−1	1	2	3
p_i	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

;

3)

x_i	−2	−1	1	2
p_i	0,1	0,2	0,5	0,2

.

Найдите MX.

671. Число очков, выбиваемых при одном выстреле каждым из двух стрелков, имеет соответственно закон распределения:

x_i	8	9	10
p_i	0,4	0,1	0,5

,

x_i	8	9	10
p_i	0,1	0,6	0,3

.

Какой из стрелков стреляет лучше?

672. Куплено 500 лотерейных билетов, причем на каждый из 40 билетов выпал выигрыш в 1 руб., 10 билетов принесли их владельцам выигрыш по 5 руб., 5 билетов — по 10 руб. Найдите средний выигрыш, выпавший на 1 билет.

673. Число вызовов, поступающих в пожарные части двух районов в течение недели, имеют соответственно законы распределения:

x_i	0	1	2
p_i	0,8	0,15	0,05

;

x_i	0	1	2
p_i	0,82	0,1	0,08

.

В каком из районов выше пожарная опасность? Сколько пожаров примерно можно ожидать в каждом из этих районов за год?

674. Случайная величина X принимает значение 7, -2, 1, -5, 3 с равными вероятностями. Найдите $\mathsf{M}X$.

675. Согласно статистическим данным вероятность того, что 25-летний человек проживет еще один год, равна 0,998. Госстрах предлагает 25-летнему человеку застраховаться на сумму 1000 руб., страховой взнос равен 3 рублям. Какую прибыль для организации помощи трудящимся в несчастных случаях ожидает получить Госстрах при страховании одного 25-летнего человека?

676. Рабочий обслуживает n станков, расстояние между соседними станками равно a. Станки отказывают независимо друг от друга и обслуживаются в порядке возникновения отказов. Вероятность возникновения требования об обслуживании на каждом станке равна $1/n$. После ликвидации отказа станка рабочий остается у этого станка. Найдите среднюю длину перехода, который совершает рабочий для ликвидации первого отказа, если:

1) $n=3$, станки расположены на одной прямой и в начальный момент времени рабочий находится у первого станка;

2) $n=3$, станки расположены на одной прямой и в начальный момент времени рабочий находится у среднего станка;

3) $n=3$, станки расположены по кругу;

4) $n=4$, станки расположены по кругу, рабочий двигается по часовой стрелке.

677. Мишень установлена так, что может вращаться вокруг оси (рис. 73). При попадании в сектор 1 стрелок

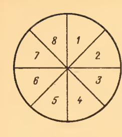


Рис. 73

выигрывает 1 руб., в сектор 2 — 2 руб. и т. д., в сектор 8 — 8 руб. При достаточно большой угловой скорости вращения мишени стрелок не в состоянии различить цифры, выписанные на секторах, и поэтому он стреляет наугад. Будет ли игра беспроигрышной, если за право стрелять один раз надо платить 5 руб.?

678. Завод выпускает массовую продукцию. Если изделие, выпущенное заводом и поступившее в продажу, выходит из строя в течение года, то оно заменяется запасным. Для установления необходимого числа запасных изделий были проведены наблюдения в 50 пунктах, где было продано по 100 изделий. Оказалось, что в течение года в пятнадцати случаях ни одно изделие не вышло из строя, в 15 — одно, в десяти — два. в шести — три, в трех — четыре и в одном 5 изделий вышло из строя. Найдите среднее число запасных изделий, которое необходимо выпускать заводу на каждые 50 изделий? Считается, что выход из строя запасного изделия невозможен.

679. Случайная величина X принимает значения -1; 0; 1. Известно, что $\mathsf{M}X=0{,}1$; $\mathsf{M}X^2=0{,}9$. Найдите вероятности, с которыми X принимает свои значения.

64. Свойства математического ожидания. Математическое ожидание случайной величины обладает следующими свойствами:

1. Для произвольной константы C

$$\mathsf{M}C=C; \quad \mathsf{M}(CX)=C\mathsf{M}X.$$

2. $\mathsf{M}(X+Y)=\mathsf{M}X+\mathsf{M}Y.$
3. Если $X\geqslant 0$, то $\mathsf{M}X\geqslant 0$.
4. Если $X\geqslant Y$, то $\mathsf{M}X\geqslant \mathsf{M}Y$.

680. Найдите математическое ожидание суммы числа очков, которые выпадают при бросании двух игральных костей.

681. Производится три выстрела с вероятностями попадания в цель, равными соответственно 0,4; 0,3; 0,6. Найдите среднее число попаданий.

682. Случайная величина X имеет закон распределения

x_i	2	3	4	5
p_i	0,3	0,1	0,5	0,1

Найдите $M(2X+5)$: 1) предварительно составив закон распределения случайной величины $2X+5$; 2) используя свойства математического ожидания.

683. Случайные величины X и Y имеют соответственно законы распределения

x_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,5

,

y_i	-1	1	2	3
q_i	0,1	0,3	0,5	0,1

Найдите: 1) $M(3X-1)$; 2) $M(2X-3Y)$; 3) MY^2.

684. За выход оборудования из строя предприятие, которое выпустило это оборудование, обязано уплатить штраф за простой, оплатить половину стоимости материала, израсходованного на ремонт, и четверть трудозатрат на ремонт. Математическое ожидание штрафа за простой, стоимости материала, трудозатрат на ремонт соответственно равны 1000, 500 и 300 руб. Найдите математическое ожидание общей суммы затрат при выходе оборудования из строя.

685. В условиях задачи 651 найдите среднюю стоимость испытаний, если стоимость одного испытания равна 45 руб.

686. Число заявок, поступающих в 2 прачечные за 1 час, имеют соответственно законы распределения

x_k	0	1	2	3	4
p_k	0,05	0,1	0,2	0,25	0,4

x_k	0	1	2	3	4
p_k	0,1	0,15	0,15	0,25	0,35

1) Какая из прачечных более загружена работой?

2) Найдите среднее число заявок, поступающих в первую прачечную за 7 часов.

3) Какое среднее число заявок поступает в обе прачечные за один час?

65. Дисперсия случайной величины. *Дисперсией* случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\mathsf{D}X=\mathsf{M}(X-\mathsf{M}X)^2.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathsf{D}X}.$$

Свойства дисперсии:

1) $\mathsf{D}X=\mathsf{M}X^2-(\mathsf{M}X)^2$;

2) $\mathsf{D}X\geqslant 0$;

3) если C — константа, то

$$\mathsf{D}C=0;\quad \mathsf{D}(CX)=C^2\mathsf{D}X;\quad \mathsf{D}(X+C)=\mathsf{D}X.$$

687. Найдите дисперсии и среднее квадратическое отклонение случайных величин, заданных в задаче 670.

688. Вероятность появления события A в испытании равна p. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа появлений события A в одном испытании.

689. Случайная величина X имеет закон распределения

x_k	1	2	3	4
p_k	0,3	0,1	0,4	0,2

Найдите $\mathsf{D}(3X-2)$: 1) предварительно составив закон распределения случайной величины $3X-2$; 2) используя свойства дисперсии.

690. Число очков, выбиваемых при одном выстреле каждым из двух стрелков, имеет соответственно закон распределения:

x_k	7	8	9	10
p_k	0,3	0,2	0,3	0,2

,

x_k	7	8	9	10
p_k	0,1	0,5	0,3	0,1

.

Найдите средние значения и дисперсии числа очков, выбиваемых первым и вторым стрелком. Какому стрелку вы отдадите предпочтение?

66. Независимые случайные величины. Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если для них выполняется равенство

$$\mathsf{P}((X=x)\cap(Y=y))=\mathsf{P}(X=x)\cdot\mathsf{P}(Y=y)$$

для всех x и y. Если случайные величины X и Y независимы, то

$$\mathsf{M}(XY)=\mathsf{M}X\cdot\mathsf{M}Y;\quad \mathsf{D}(X+Y)=\mathsf{D}X+\mathsf{D}Y.$$

691. Случайные величины X и Y независимы и имеют соответственно законы распределения:

x_k	1	2	3
p_k	0,3	0,5	0,2

,

y_k	-1	0	1	2
p_k	0,4	0,1	0,2	0,3

.

Найдите: 1) $\mathsf{M}(XY)$; 2) $\mathsf{D}(2X+3Y)$; 3) $\mathsf{D}(2X-3Y)$.

692. Известно, что случайные величины X и Y независимы; $\mathsf{D}X=2$, $\mathsf{D}Y=5$. Найдите $\mathsf{D}(3X+Y)$.

693. Дисперсия каждой из 9 попарно независимых случайных величин равна 36. Найдите дисперсию среднего арифметического этих величин.

694. Число бракованных изделий в каждой партии поставляемых изделий имеет закон распределения

x_k	0	1	2	3
p_k	0,6	0,25	0,1	0,05

.

Стоимость восстановления каждого из бракованных изделий может принимать значения 100, 150, 200 руб. соответственно с вероятностями 0,5; 0,3; 0,2. Найдите средние потери потребителей одной партии изделий, если число бракованных изделий и стоимость восстановления каждого из бракованных изделий независимы.

67. Числовые характеристики биномиального распределения. Если случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p, то

$$\mathsf{M}X=np, \quad \mathsf{D}X=npq.$$

695. Техническая система содержит 5 однотипных деталей, дублирующих работу друг друга. Каждая из них выходит из строя с вероятностью 0,1. Пусть X — число деталей, вышедших из строя. Найдите: 1) $\mathsf{M}X$; 2) $\mathsf{D}X$; 3) $\sigma(X)$.

696. Игральная кость подбрасывается 15 раз. Сколько раз в среднем может появиться 4 очка?

697. Найдите дисперсию числа появлений события в трех независимых испытаниях, если математическое ожидание этой случайной величины равно 0,9, вероятность появления события от испытания к испытанию не меняется.

698*. Устройство состоит из 4 элементов. Вероятность отказа любого элемента за время опыта равна 0,2. Найдите математическое ожидание числа опытов, в каждом из которых откажет ровно один элемент, если всего произведено 100 независимых опытов.

699. Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события A в каждом испытании. Найдите эту вероятность, если дисперсия числа появлений события A в трех независимых испытаниях равна 0,63.

68. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. При произвольном положительном ε для любой случайной величины X выполняется неравенство

$$\mathsf{P}\left(|X-\mathsf{M}X|>\varepsilon\right)\leqslant\frac{\mathsf{D}X}{\varepsilon^2}.$$

Если случайные величины X_1, ..., X_n независимы и имеют одно и то же математическое ожидание a и одну и ту же дисперсию, то для произвольного

$\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1$$

(*теорема Чебышева*).

Пусть k — число наступлений события A в n испытаниях Бернулли, p — вероятность наступления этого события в каждом испытании. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) = 1$$

(*теорема Бернулли*).

700. Пусть $\mathsf{M}X = 7$, $\mathsf{D}X = 4$. 1) Оцените с помощью неравенства Чебышева $\mathsf{P}(|X-7| > 2{,}5)$ и $\mathsf{P}(1 \leqslant X \leqslant 13)$. 2) При каком значении k выполняется неравенство $\mathsf{P}(|X-7| \leqslant k) \geqslant 0{,}99$?

701. Вероятность производства нестандартной детали равна $p = 0{,}01$. Оцените вероятность того, что число нестандартных среди 10 000 деталей будет заключено между 85 и 115?

702. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа в течение суток для каждого элемента равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оцените вероятность того, что модуль разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за сутки окажется меньше 2.

703. В осветительную сеть включено параллельно 20 лампочек. Вероятность того, что в течение суток лампочка будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оцените вероятность того, что модуль разности между числом включенных ламп и средним числом включенных ламп за сутки окажется: 1) не больше трех; 2) больше трех.

704*. Сколько надо сделать опытов, чтобы равенство $p \approx m/n$ с точностью до 0,05 выполнялось с вероятностью 0,95?

705*. С какой вероятностью выполняется неравенство $\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant 0{,}1$ при 100 опытах?

706*. Укажите приблизительно точность равенства $p \approx m/n$, если оно получено при 50 опытах с вероятностью 0,9.

69. Понятие о задачах математической статистики. Пусть в выборке из n наблюдений за случайной величиной X эта величина n_1 раз принимала значение

x_1, n_2 раз — значение x_2, ..., n_m раз — значение x_m, $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$. *Выборочным средним* называется величина

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{m} x_i \frac{n_i}{n}.$$

Выборочная дисперсия вычисляется по формуле

$$s^2=\sum_{i=1}^{m} (x_i-\bar{x})^2 \frac{n_i}{n}.$$

707. В половине наблюдений случайная величина равнялась 1, а в другой половине она равнялась 3. Найдите выборочное среднее и выборочную дисперсию.

708. Результат пяти измерений равен 1, результат трех измерений равен 2 и результат одного измерения равен 3. Найдите выборочное среднее и выборочную дисперсию.

709. В некотором доме три семьи не имеют велосипеда, 20 имеют по одному велосипеду, 15 семей — по 2 велосипеда и две семьи имеют по три велосипеда. Найдите среднее значение и среднее квадратическое отклонение числа велосипедов, имеющихся в одной семье.

710. При исследовании потока деталей, поступающих на конвейер, получены данные, характеризующие распределение числа поступивших деталей в течение двухминутных интервалов:

Число деталей	0	1	2	3	4	5	6
Число интервалов	400	167	29	3	0	0	1

Найдите выборочное среднее и выборочную дисперсию.

711. При исследовании трещин в 1000 сварных соединениях получены следующие данные:

Число трещин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Число случаев	135	271	271	180	90	36	12	3	1	1

Вычислите выборочное среднее и выборочную дисперсию.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

ГЛАВА 1

6. 1) 36,07; 2) $-0{,}018$; 3) 19; 4) $-0{,}001$; 5) 2 100 000 000; 6) 43,27568. **7.** 1) $-7{,}23$; 2) 3270; 3) 0,00093; 4) $-0{,}143$; 5) $-71\,800\,000\,000$. **8.** 1) 0,041; 2) $-0{,}659$; 3) 0,001; 4) $-0{,}059$; 5) $-0{,}009$; 6) 0,341. **9.** 1) 0,01; 2) 0,03; 3) 3. **10.** 0,1 см. **11.** 0,125 и 0,1 см. **12.** 1) нет; 2) нет; 3) нет; 4) да. **15.** 1) 10^{-40} Дж·с; 2) 10^{17} моль$^{-1}$; 3) 10^{-37} кг; 4) 10^{-15} Н·м^2/кг^2; 5) 1° С. **16.** 1) $7{,}4 \leqslant x \leqslant 7{,}8$; 2) $26{,}4 \leqslant x \leqslant 28{,}2$; 3) $124 \leqslant x \leqslant 130$; 4) $42{,}3 \leqslant x \leqslant 43{,}7$. **17.** 1) да; 2) нет; 3) да; 4) нет. **18.** 3; 3; 3; 2; 2; 1; 2,3. **20.** 1) 2,3; 2,3; 8, 7, 3, 9, 4; 9,3; 2,5; 2) $2{,}3 \cdot 10^3 \pm 98$; $2{,}3 \cdot 10 \pm 0{,}86$; $87{,}394 \pm 0{,}0003$; $9 \pm 0{,}43$; $2 \pm 0{,}613$. **21.** 1) 3,22; 2) 16,471; 3) $-0{,}007$; 4) $1{,}2 \cdot 10^6$; 5) 19,6; 6) 20,5150; 7) $2379 \cdot 10$; 8) $-9{,}7$; 9) 0,2095; 10) 17,73; 11) 683,39; 12) 32,9; 13) 23 368. **22.** $\approx 1{,}53$ м/с^2. **23.** $\approx 2{,}7$ кг. **24.** ≈ 44 Н. **26.** 1) $(ab+c)(-d)$; 2) $(a+b)d:e$. **28.** 1) 9,600; 11,833; 7,555; $-17{,}224$; 2,175; 2) 16,957; 45,119; 605,903; 3,221; 0,017; 3) 0,200; 0,037; 1,449; 63,392; 0,000. **29.** 1) 0,3846; $\frac{1}{65\,000}$; 2) 0,8824; $\frac{1}{21\,250}$; 3) 0,1707; $\frac{1}{410\,000}$; 4) 4,1304; $\frac{1}{28\,750}$. **30.** 1) $\frac{1}{16\,500}$; 2) $\frac{107}{1750}$; 3) $\frac{1}{3285}$; 4) $\frac{18}{1625}$; 5) $\frac{2}{1645}$; 6) $\frac{107}{1500}$. **31.** $\frac{1}{189}$. **32.** $\frac{1}{41}$; $\frac{2}{123}$. **33.** Скорость света. **34.** 2,1 т; 2,9 т. **35.** 1) 50%; 2) 6%; 3) 0,3%. **36.** Размах крыла. **37.** 1) 6,9; 0,03; 0,44%; 2) 83,4; 0,02; 0,024%; 3) 71,7; 0,021; 0,03%; 4) 0,3; 0,042; 14%. **38.** 1) $1{,}6 \cdot 10^{-5}$%; 2) $1{,}7 \cdot 10^{-5}$%; 3) $1{,}1 \cdot 10^{-5}$%; 4) $1{,}5 \cdot 10^{-3}$%; 5) $3{,}8 \cdot 10^{-2}$%. **39.** 1) 0,176; 3,357; 0,296; 2) $\frac{1}{1496}$; $\frac{1}{23\,499}$; $\frac{1}{999}$. **40.** 1) $\frac{1}{1001}$; 2) $\frac{1}{1001}$; 3) $\frac{1}{624}$; 4) $\frac{1}{2001}$. **42.** 1) 0,46% 2) 0,13%; 3) 0,058%; 4) 0,018%. **43.** 1) 3; 2) 2; 3) 2; 4) 1. **44.** 1) 11; 2) 0,58. **45.** 1) $8{,}01 < a+b < 8{,}15$; $-0{,}39 < a-b < -0{,}25$; 2) $300 < a+b < 308$; $146 < a-b < 154$; 3) $0{,}824 \pm 0{,}0011$; $-0{,}122 \pm 0{,}0011$; 4) $5{,}6 \cdot 10^4 \pm 1030$; $1{,}4 \cdot 10^4 \pm 1030$;

5) 147 ± 6,89; 101 ± 6,89; 6) 0,130 ± 0,000464; −0,018 ± 0,000464. **46.** 1) 1,715 Н; 2) 0,005 Н. **47.** ≈10,9 Ом. **48.** ≈305 Ом. **49.** 1) 15,9; 2) 4,85; 3) 11,0; 4) $-5{,}988 \cdot 10^6$; 5) 88 535; 6) 0,10. **50.** ≈9,22 м. **51.** $1{,}8 \cdot 10^2$ Ом; 5,0 Ом. **52.** 1) 99; 101,84; 2) 72,7425; 74,1405; 3) 0,03626; 0,04141; 4) 130,5; 545,3; 5) 0,01736; 0,01754. **53.** ≈500 с. **54.** 1) $6{,}3 \cdot 10^{-2}$; 2) $1{,}71 \cdot 10^3$; 3) 3,2; 4) $3{,}845 \cdot 10^3$; 5) 6,809; 6) $2{,}3 \cdot 10^3$. **55.** 1) 7,04; 2) $1{,}292 \cdot 10$; 3) $8{,}1 \cdot 10^{-3}$; 4) $7{,}84 \cdot 10^5$; 5) $3{,}731 \cdot 10^3$; 6) $1{,}7 \cdot 10^{-1}$; 7) $2{,}8 \cdot 10^{11}$. **56.** 0,021 см; 0,06 см. **58.** 0,21 см; 0,41 см; с двумя значащими цифрами. **59.** 1) $\approx 1{,}99 \cdot 10^{20}$ Н; 2) 0,98%. **60.** 1) ≈63 Дж; 2) 9,3%. **61.** 1) 12,7; 2) $211 \cdot 10$; 3) $2170 \cdot 10^3$; 4) $7{,}18 \cdot 10^{-2}$; 5) $1{,}579 \cdot 10^{-3}$; 6) $29\,417 \cdot 10$; 7) $6{,}6946 \cdot 10^{-4}$; 8) $3{,}442 \cdot 10^{-9}$; 9) 16,2; 10) $725 \cdot 10^2$; 11) $1{,}43 \cdot 10^8$; 12) 6393; 13) 15,0332; 14) $5{,}98 \cdot 10^{-2}$; 15) $4{,}810 \cdot 10^{-10}$; 16) $13{,}3 \cdot 10^6$; 17) 0,1572208; 18) $2{,}62 \cdot 10^{-8}$; 19) $15{,}78 \cdot 10^{12}$. **62.** 1) 1,324; 2) 6,2651; 3) 0,170; 4) $8{,}01416 \cdot 10^{-3}$; 5) 588; 6) 1,33; 7) 2,592; 8) $8{,}4033 \cdot 10^{-2}$; 9) 98,4; 10) $7{,}1871 \cdot 10^{-2}$. **63.** ≈2,20 с. **64.** 2,703 ± 0,032. **65.** 1) 0,208; 2) 0,269; 3) 0,588; 4) 0,623; 5) 0,885; 6) 0,682; 7) 0,500; 8) 0,765; 9) 2,414; 10) 7,462; 11) −1,449; 12) 0,093; 13) 0,859; 14) −1,237; 15) 5,184; 16) 3,443; 17) 69,183; 18) 1,718; 19) 0,284; 20) 0,000; 21) 66,686; 22) 0,000; 23) 187,416; 24) 0,298; 25) 0,081; 26) 0,091; 27) с указанной точностью вычислить нельзя. **66.** 2) 72°18′; 7,70; 7,33; с тремя значащими цифрами: 3) 49°37′; 0,06294; 0,04078; 5) 55°45′; 144,9; 98,66; с тремя значащими цифрами; 6) 17°24′; 0,278; 0,0870; 8) 17°23′; 72°37′; 82,0; 9) 37°10′; 52°50′; 0,0098215; 11) 45°22′; 44°38′; 50,795; 12) 38°22′; 51°38′; 0,23. **67.** 2) 92°12′; 1,57; 2,82; 3) 83°42′; 0,2129; 0,3085; 5) 46°18′; 54°00′; 79°42′; 6) 32°11′; 51°35′; 96°14′; 7) 48°7′; 74°10′; 15,2; 9) 69°12′; 72°24′; 0,5320 или 110°48′; 30°48′; 0,2858; 11) 1099; 111°50′; 50°48′. **68.** 1) 6,7000; 7,7981; 8,2000; 2) 1,7238; 1,2731; 0,8208; 0,3675; 3) −5,5318; −3,2887; 1,4600; 11,5130; 32,7952; 77,8496; 4) 2,5000; −4,4750; −6,8406; −8,7704; 5) 1,5178; 1,8756; −0,3050; 0,2054; 6) 12,4571; 12,4601; 12,4878; 12,7572; 7) 1,1293; −0,0001; 0,0000. **72.** 1) 25,3188; −275,4273; 2) −0,4539; 10 998, 151. **73.** 1) 30,3333; 0,9651; 2) 0,7761; 0,2114; 7,1767; 0,3297. **74.** 1) 1,0000; 0,7500; 0,5100; 0,1900; 0,0975; 0,0396; 0,0199; 2) 5,0000; 2,8750; 1,8570; 0,6710; 0,3426; 0,1388; 0,0697; 3) 2,7000; 0,4875; 0,2997; 0,1431; 0,0801; 0,0344; 0,0176. **75.** 1) 1,0000; 0,6424; 0,6217; 0,6146; 0,6110; 0,6088; 2) 1,3000; 1,6344; 1,7796; 1,8425; 1,8775; 1,8998; 3) 1,5452; 1,5448; 1,5443; 1,5439; 1,5435; 4) 5,0910; 5,0842; 5,0791; 5,0751. **76.** 12,527; 13,083. **77.** 1) 0,161; 1,239; 2) −1,297; 0,964; 3) −0,961; 0,394; 4) −2,273; 0,752; 5) −0,870; 1,584; 6) −0,625; 2,418.

ГЛАВА 2

79. 1) −3; 2) 0,4; 3) ±3; 4) 0; −3; 5) нет; 6) 2; 5. **80.** 1) 2; 2) ±4; 3) 0; ±5; 4) −1; 1,5; 5) 0; 6) нет. **81.** 1) $x=0$, $y=-2/3$; 2) $x=1$, $y=2$ или $x=2$, $y=2$. 3) $x=1$; $y=1$; 4) $x=2$; $y=-2$.

82. 1) $2-2i$; 2) 12; 3) 0, $2-1{,}4i$; 4) $0{,}2+0{,}9i$; 5) $\frac{1}{6}-\frac{1}{4}i$; 6) $27+8i$; 7) $15-11i$; 8) $0{,}23-0{,}02i$; 9) $\frac{2}{5}-\frac{1}{30}i$; 10) $-5-12i$; 11) $-2i$; 12) 15; 13) $5+9i$; 14) $-4+20i$; 15) 78. **83.** 1) $x=1$, $y=2$; 2) $x=2$, $y=1$; 3) $x=-4/11$; $y=5/11$; 4) $x=t$, $y=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}t$, $t\in R$; 5) $x=4{,}5$; $y=18$; 6) $x=0$, $y=1$ или $x=1$, $y=0$; 7) Нет таких действительных чисел. **84.** 1) $-\frac{21}{29}+\frac{20}{29}i$; 2) $-\frac{21}{29}-\frac{20}{29}i$. **86.** 1) 0; 2) i; 3) $-i$; 4) -1; 5) 0. **87.** 1) $7+i$; 2) $5i$. **88.** 1) $u=2i$, $v=3i$; 2) $u=i$, $v=-4i$; 3) $u=2i$, $v=i$; 4) $u=2i$, $v=2i$. **90.** a^2+b^2. **91.** Например: 1) $(a+bi)(a-bi)$; 2) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}i)\times$ $\times(\sqrt{a}-\sqrt{b}i)$; 3) $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}i)(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}i)$; 4) $(3a+4bi)(3a-4bi)$; 5) $(6a+5bi)\times$ $\times(6a-5bi)$. **95.** 1) $-2-3i$; 2) $2+3i$; 3) $2-3i$. **98.** $0{,}5+0{,}5i$. **99.** 1,5. **100.** 1) 3; 2) 1; 3) 5; 4) 2; 5) $\sqrt{2}$; 6) 5; 7) 2; 8) 2; 9) $\sqrt{1{,}5}$. **102.** $-2{,}5$; 2. **103.** 1) $z=0$ или $z=bi$, $b\in R$; 2) $z=2-1{,}5i$. **104.** 1) $-5+4i$; 2) $1{,}6-8{,}5i$; 3) $-\frac{11}{8}-\frac{1}{4}i$; 4) $4\sqrt{2}+2\sqrt{6}i$. **105.** 1) $-5-i$; 2) $-10-i$; 3) $3{,}9+8i$; 4) $-\frac{4}{3}+i$. **106.** 1) $0{,}5+0{,}5i$; 2) $1-2i$; 3) $0{,}6+0{,}8i$; 4) $1{,}5+1{,}5i$; 5) $\frac{8}{13}-\frac{1}{13}i$; 6) $2i$; 7) $-i$; 8) $0{,}7+2{,}1i$; 9) $2-2i\sqrt{3}$. **107.** 1) $-0{,}04-0{,}28i$; 2) $-1{,}5-3{,}5i$; 3) $-0{,}52-0{,}64i$; 4) $\frac{6}{17}-\frac{10}{17}i$. **108.** 1) 0; 2) $-i$; 3) $-4/3$. Указание: $(1+i)^2=2i$, $(1-i)^2=-2i$. **110.** 1) 4; 2) 7; 3) 5; 4) $5\sqrt{2}$; 5) 8; 6) $\sqrt{2}$; 7) $\sqrt{5}$; 8) $2\sqrt{10}$. **112.** 1) $|z|<5$; 2) $|z|=5$; 3) $|z|>5$. **115.** 1) Окружность с радиусом 1 и центром в начале координат; 2) таких точек нет; 3) таких точек нет. **117.** 1) $1\pm 2i$; 2) $-\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{5}}{3}i$; 3) $4\pm 2i$; 4) $0{,}4\pm 1{,}2i$. **118.** 1) $x=3+6i$, $y=3-6i$; $x=3-6i$, $y=3+6i$; 2) $x=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{23}}{4}i$, $y=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{23}}{6}i$; $x=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{23}}{4}i$, $y=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{23}}{6}i$. **121.** 1) $x^2-6x+13=0$; 2) $x^2+2x+17=0$. **122.** 1) $x^2-4x+5=0$; 2) $x^2+2x+1{,}25=0$; 3) $x^2-2\sqrt{5}x+7=0$; 4) $x^2-x+2{,}5=0$. **123.** 1) -2; $-1\pm\sqrt{3}i$; 2) -3; $1{,}5\pm 1{,}5\sqrt{3}i$; 3) ± 2; $\pm 2i$; 4) ± 3; $\pm 3i$. **124.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; 2) $2+i$; $-2-i$. **125.** 1) $2\pi n$, $n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; 3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $\pi+2\pi n$, $n\in Z$; 5) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; 6) $-0{,}927+6{,}28n$, $n\in Z$; 7) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; 8) $\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; 9) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$,

$n\in Z$. **127.** 1) $-\pi/6$ или $-\frac{5\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$ или $-\frac{\pi}{4}$; 3) $\pi/3$ или $-\frac{2\pi}{3}$; 4) $44^\circ 26'$ или $135^\circ 34'$. **128.** 1) -3; 2) $2i$; 3) $2\sqrt{3}+2i$. **130.** 1) $|z|\leqslant 2$; $2\pi n\leqslant \operatorname{Arg} z\leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; 2) $1\leqslant |z|\leqslant 2$; 3) $\frac{\pi}{3}+2\pi n<\operatorname{Arg} z\leqslant \frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$. **131.** 1) $3+0i$; 2) $0+\sqrt{2}i$; 3) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; 4) $2-2\sqrt{3}i$; 5) $-1+0i$; 6) $0-\sqrt{3}i$; 7) $1{,}37+0{,}366i$; 8) $4{,}60+3{,}86i$; 9) $0{,}913+0{,}407i$; 10) $2{,}5\sqrt{3}+2{,}5i$. **132.** 1) $2(\cos 0+i\sin 0)$; 2) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$; 3) $6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$; 5) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 6) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$; 7) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$; 8) $5(\cos 126^\circ 52'+i\sin 126^\circ 52')$; 9) $\sqrt{26}(\cos 2{,}94+i\sin 2{,}94)$; 10) $8{,}82\times$ $\times(\cos 0{,}616+i\sin 0{,}616)$; 11) $1{,}39(\cos 2{,}10+i\sin 2{,}10)$; 12) $\frac{1}{\cos 1}(\cos 1+$ $+i\sin 1)$; 13) $2(\cos(-20^\circ)+i\sin(-20^\circ))$; 14) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$; 15) $5(\cos(-140^\circ)+i\sin(-140^\circ))$; 16) $2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. **134.** 1) $-8i$; 2) $1{,}5\sqrt{3}+4{,}5i$; 3) $-1+i$; 4) $-20i$; 5) $\cos 5+i\sin 5$; 6) $3i$; 7) $2+2i\sqrt{3}$; 8) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-1{,}5i$. **135.** 1) $\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi$; 2) $\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(2\varphi-15^\circ)+i\sin(2\varphi-15^\circ))$; 4) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right)$; 5) $-\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)$; 6) i. **136.** 1) $2i$; 2) $6-4i$; 3) $6-3i$. **137.** 1) $1296i$; 2) $-2^{11}-2^{11}\sqrt{3}i$; 3) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 4) $2^{49}+2^{49}\sqrt{3}i$; 5) 1; 6) $-122+597i$; 7) $0{,}99+0{,}15i$; 8) $2^9(1-i\sqrt{3})$; 9) $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$; 10) $-64-$ $-64i$. **139.** $\cos x+i\sin x$. **141.** 1) $3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=-1{,}5+1{,}5\sqrt{3}i$; 2) $4(\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ))=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$; 3) $\cos 1+i\sin 1\approx$ $\approx 0{,}54+0{,}84i$; 4) $\cos 0+i\sin 0=1$; 5) $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2i$; 6) $5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=-5i$; 7) $\sqrt{2}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\sqrt{2}$; 8) $3(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=3$; 9) $6(\cos 1{,}5+i\sin 1{,}5)\approx 0{,}424+5{,}98i$; 10) $14(\cos(-34^\circ)+i\sin(-34^\circ))\approx 11{,}6-7{,}83i$. **142.** 1) $3e^{0i}$; 2) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$; 3) $2e^{i\frac{\pi}{4}}$; 4) $4e^{-i\frac{\pi}{3}}$; 5) $e^{i\pi}$; 6) $\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$; 7) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$; 8) $6e^{i\frac{2\pi}{9}}$; 9) $e^{i\frac{2\pi}{15}}$; 10) $5e^{i\frac{\pi}{6}}$.

143. 1) $2e^{0i}$; 2) $3e^{i\pi}$; 3) $6e^{i\frac{\pi}{2}}$; 4) $4e^{-i\frac{\pi}{2}}$; 5) $\sqrt{2}e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$; 6) $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$; 7) $2\sqrt{2}e^{-i\cdot\frac{3\pi}{4}}$; 8) $5e^{2,21i}$; 9) $\sqrt{26}\,e^{2,94i}$; 10) $8,82e^{0,616i}$; 11) $1,39e^{2,10i}$; 12) $\frac{1}{\cos 1}e^{i}$; 13) $2e^{-i\frac{\pi}{9}}$; 14) $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}$; 15) $5e^{-i\cdot\frac{7\pi}{9}}$; 16) $2\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$. **144.** 1) $6e^{i\pi}=6(\cos\pi+i\sin\pi)=-6$; 2) $4e^{i\frac{\pi}{4}}=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$; 3) $3e^{2i}=2(\cos 2+i\sin 2)\approx-0,832+1,82i$; 4) $2\sqrt{2}e^{\frac{4\pi}{9}i}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{4\pi}{9}\right)\approx 0,491+2,79i$; 5) $2\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=$ $=-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$; 6) $2^{10}e^{-i\frac{2\pi}{9}}=2^{10}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)\right)\approx 784+658i$. **145.** 1) $2e^{i\frac{5\pi}{12}}$; 2) $2e^{i\frac{11\pi}{12}}$; 3) $0,5e^{-i\frac{11\pi}{12}}$; 4) 64; 5) -1; 6) 1/8. **146.** 1) -32; 2) -32. **147.** 1) $7,64\cos(5t+0,182)$; 2) $7,62\cos(2t+0,797)$. **148.** $56,6\cos(50t-0,79)$. **149.** $10\cos(10t+2,44)$.

ГЛАВА 3

150. 4; 4; **151.** 1) 6; 2) 8; 3) 12; 4) 26; 5) 20; 6) 18. **154.** Указание: концы построенных направленных отрезков образуют фигуру, полученную из данной с помощью параллельного переноса. **155.** 1) $\overline{AC}$; 2) $\overline{DA}$; 3) $\bar{0}$; 4) $\overline{CM}$; 5) $\overline{OB}$; 6) $\overline{OC}$; 7) $\overline{CD}$; 8) $\overline{BD}$; 9) $\overline{OM}$. **157.** 1) 5 Н; 2) 9,7 Н; 3) 31 Н. **158.** 1) 60°; 2) 134°. **159.** 10^{-6} Н; 2) 10^{-13} Н. **160.** 1) 51 км/ч; 2) 3,5 м/с; 3) 8,1 км/ч; 4) 8,5 км/ч. **163.** 1) $\bar{a}=\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}+\bar{e}$; 2) $\bar{a}=-\bar{b}-\bar{c}-\bar{d}-\bar{e}$; 3) $\bar{a}=-\bar{b}-\bar{c}-\bar{d}-\bar{e}$. **164.** 1) 0; 2) 0; 3) $4\cdot10^{-2}$ Н; 4) $4\cdot10^{-4}$ Н. **165.** 1) $\overline{BA}$; 2) $\overline{AB}$; 3) 0. **166.** 1) $\overline{BB_1}$; 2) $\overline{CC_1}$; 3) $\overline{AD}$; 4) $\overline{D_1B}$. **167.** 1) 7 Н; 2) 14 Н. **169.** 1) 1; 2) -1; 3) $x<0$; 4) $x>0$; 5) $x\in R$. **170.** 1) -1; 2) -2; 3) $-1/2$; 4) 2. **171.** 1) $2\bar{F}_1$; 2) $(1-\sqrt{2})\bar{F}_1$; 3) $(1-\sqrt{3})\bar{F}_1$. **172.** 1) 180°; 2) 0°; 3) 30°. **174.** 1) 2; 2) -2; 3) -2; 4) $-1/2$; 5) 0; 6) $-3/2$. **175.** Указание: раскройте скобки, пользуясь свойствами скалярного произведения. Воспользуйтесь тем, что $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$. **176.** 20. **177.** 1) -39; 2) 76; 3) $\sqrt{156}$; 4) 7; 5) $\sqrt{301}$; 6) -12. **178.** 65°. **180.** 1) $\sqrt{2}$, 76 ; 2) 2, 69°. **181.** Указание: построение искомых векторов сводится к построению треугольников по трем элементам. **182.** 1) 6 Н; 2) 9 Н. **183.** 50°, 24°. **184.** 1) 11 Н, 6 Н; 2) 12 Н; 10 Н. **185.** 1) 14 Н; 10 Н; 2) 16 Н; 18 Н. **186.** Под углом $\alpha=120°$ к направлению течения реки, 8,7 км/ч; 2) под углом $\alpha=146°$ к направлению течения реки, 3,3 км/ч. **187.** 1) $\frac{1}{2}(\overline{AB}-\overline{AD})$; $\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{AB})$;

$\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{AB})$; $\frac{1}{2}(\overline{AB}-\overline{AD})$; 2) $\frac{1}{2}(\overline{AC}-\overline{BD})$; $\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{BD})$; $\frac{1}{4}(\overline{AC}-\overline{BD})$; $\frac{1}{4}(\overline{AC}+\overline{BD})$. **188.** 1) $\bar{a}+\bar{c}$; 2) $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$; 3) $\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c}$; 4) $\bar{a}+\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c}$; 5) $\bar{a}+\frac{1}{2}(\bar{b}+\bar{c})$; 6) $\frac{1}{2}\bar{b}$; 7) $\frac{1}{2}\bar{b}-\bar{a}$. **189.** 1) (1; 2), (−1; −2), (−1; 2); 2) (−3; 0), (3; 0), (3; 0); 3) (1; −2; 4), (−1; 2; 4), (−1; −2; −4), (−1; −2; 4). **190.** 1) 2, −1; 2) −1, 3, 0; 3) −3, −2, 3. **191.** 1) $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; 0\right)$, $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}; 0\right)$, $\left(0; \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0; -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$; 2) $(a; 0)$, $\left(\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$, $\left(-\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$, $(-a; 0)$, $\left(-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$, $\left(\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$. **192.** 1) (0; 0; 0), (a; 0; 0), (a; a; 0), (0; a; 0), (0; 0; a), (a; 0; a), (a; a; a), (0; a; a). **193.** Указание: воспользуйтесь тем, что данные точки симметричны относительно оси y. **195.** 1) $\overline{OA}=(-1; 2)$, $\overline{AB}=(5; 3)$; $\overline{BD}=(-2; 1)$; 2) $\overline{OB}=(4; 5)$, $\overline{AC}=(0; -5)$, $\overline{BC}=(-5; -8)$; 3) $\overline{CO}=(1; 3)$, $\overline{DA}=(-3; -4)$; $\overline{CD}=(3; 9)$. **196.** 1) (0; 1); 2) (−2; 0); 3) (−5; −3); 4) (−1; −1). **197.** 1) (1; 5; 2); 2) (5; 4; 0); 3) (6; 9; 0); 4) (6; 8; 0); 5) (−6; −8; 0); 6) (−6; −8; 0); 7) (9; 2; −6). **199.** 1) 0; 2) (0; 1; −1). **200.** 1) (3; −4; 0); 2) (−3/5; 4/5; 0); 3) (3/5; −4/5; 0). **201.** 1) 6; 2) 3; 3) 0; 4) 0; 5) −20; 6) 50. **202.** 1) (1; 1); 2) (−1; 1); 3) (−1; −1); 4) (1; −1). **203.** 1) $\overline{OA}=(\sqrt{3}; 1)$, $\overline{OB}=(-1; \sqrt{3})$; $\overline{OC}=(-\sqrt{3}; -1)$, $\overline{OD}=(1; -\sqrt{3})$; 2) $\overline{OA}=(1; \sqrt{3})$, $\overline{OB}=(1; -\sqrt{3})$, $\overline{OC}=(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $\overline{OD}=(-\sqrt{3}; 1)$. **204.** $\bar{a}=(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$. **205.** 1) 60° или 120°; 2) 90°. **206.** 2) 22 Н, 12 Н. **207.** 1) (21; 0); 2) (0; −3). **208.** 1) (7,4; 0); 2) 6; 3) −1. **209.** 1) 5; 2) $3\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{6}$; 4) 5. **210.** 1) 45°; 45°; 2) 45°; 135°; 3) 56°; 34°; 4) 37°; 127°; 5) 55°; 125°, 55°; 6) 66°; 35°, 114°; 7) 143°; 74°, 58°; 8) 55°; 55°; 55°. **211.** 1) 2 м/с, 27°; 2) 5 м/с, 53°. **212.** 1) 45°; 2) 45°; 3) 35°; 4) 138°; 5) 105°; 6) 135°; 7) 40°. **213.** 1) 6°, 122°, 49°; 2) 48°, 40°, 80°. **214.** 1) Нет; 2) да; 3) да; 4) да. **215.** 1) Да; 2) нет; 3) нет. **216.** 1) а) Да; б) нет; 2) (4; 1) а) да; б) да; 3) а) да; б) нет. **217.** 1) Параллелограмм; 2) квадрат; 3) параллелограмм; 4) трапеция; 5) трапеция. **218.** 1) Равнобедренный, прямоугольный; 2) разносторонний, тупоугольный; 3) равнобедренный; тупоугольный. **219.** 1) (5; −2; 3); 2) (4; 7; 4); 3) (6; 5; 5). **220.** 1) (4; 5); 2) (0; 2,5; 2); 3) (−3; 4); 4) (−3, 4, 3); **221.** 1) (16; 7); 2) (11; 11/3), (21; 31/3); 3) (6; 1/3), (11; 11/3), (16; 7), (21; 31/3), (26; 41/3). **222.** 1) (0; −2), (4; 0); 2) (0; 8), (6; 0). **223.** 1) (10; 9); 2) (4; −4). **224.** 1) (0; −2); 2) (1; 0); 3) (−1; 2; 3); 4) (1; 2; 1). **225.** 1) (8; 2); 2) (28/3; 11/3); 3) (8,8; 3); 4) (9; 3,25). **226.** 1) (0; 3); 2) (2,4; 2,8). **229.** Центр квадрата. **231.** 1) C; 2) A; 3) B; 4) A, B; 5) никакая; 6) D; 7) A; 8) D.

232. 1) а) (2; 1/2); б) (3; 1), (−1; −1); в) (−1; −1); 2) а) (2; 2); б) (1; 1), (−1; −1); в) все точки прямой; 3) а) все точки прямой; б) (2; 1), (2; −1); в) (2,2); 4) а) (2; 0); б) таких точек нет; в) (0; 0); 5) а) (2; 0); б) ($\sqrt{3}$; 1), ($-\sqrt{3}$; 1), ($\sqrt{3}$; −1), ($-\sqrt{3}$; −1); в) ($\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$), ($-\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$); 6) а) (2; 1); б) (2; 1), (−2; 1); в) (0; 0), (4; 4); 7) а) (2; 1); б) (2; 1), (−2; −1); в) ($\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$), ($-\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$); 8) а) (2; 2), (2; −2); б) (1; 1), (−1; 1), (1; −1), (−1; −1); в) все точки прямой $x-y=0$; 9) а) (2; 1), (2; −1); б) (2; 1), (2; −1); в) (0; 0), (0,5; 0,5). **237.** Указание: представьте уравнение в виде $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$. **238.** 1) $(x-1)^2+(y+2)^2=9$; 2) $(x+2)^2+(y-3)^2=18$; 3) $x^2+y^2=4$; 4) $(x+3)^2+(y-2)^2=4$; 5) $(x-5)^2+(y+4)^2=5$; 6) $(x+3)^2+(y+3)^2=9$; 7) $(x-5)^2+(y-2)^2=25$. **239.** 1) $(x-1)^2+(y-2)^2=1$; 2) $(x+1)^2+(y+2)^2=1$; 3) $(x-1)^2+(y+2)^2=1$; 4) $(x+2)^2+(y-3)^2=1$. **240.** 1) $4x-4y+5=0$; 2) $x^2+y^2=5$; 3) $2x-y+5=0$; 4) $x^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$; 5) $x=-1$; 6) $y^2=1$; 7) $y=\frac{1}{8}x^2$. **241.** 1) $(2+\sqrt{2};\ 0)$, $(2-\sqrt{2};\ 0)$, (0; 4); 2) $2\sqrt{2}$; 3) над; 4) $y=2x^2$; 5) $y=2x^2+8x+4$; 6) $y=-2x^2-8x-4$. **242.** 1) $y=(x-2)^2+1$; 2) $y=-2(x-4)^2+3$; 3) $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+1$. **243.** 36 см. **244.** 3 м. **245.** 1) Пересекаются; 2) касаются; 3), 4) не имеют общих точек. **246.** 1) (1; 1); 2) (0; −1), (−1; −3); 3) (4; 7), (1; 1). **247.** 1) $k\in R$; 2) $|k|<4$. **248.** 1) Два; 2) три; 3) два. **249.** 1) 4; 2) 9; 3) 40; 4) 36; 5) 32. **250.** 1) 2/3; 2) $\sqrt{3}/3$; 3) −2; 4) 2/3; 5) 0. **251.** 1) $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$; 2) $x+\sqrt{3}y-2\sqrt{3}=0$, $x+\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$, $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$, $x-\sqrt{3}y-2\sqrt{3}=0$. **252.** 1) $y+2=0$; 2) $x+y+1=0$; 3) $x=1$; 4) $3x-2y-7=0$; 5) $x+y+1=0$; 6) $3x-2y-7=0$; 7) $x-y-3=0$; 8) $2x-y-4=0$; 9) $x+3y+5=0$; 10) $5x+y-3=0$ или $x-y-3=0$. **253.** 1) $x-y+1=0$; 2) $x-5y-7=0$; 3) $3x+y-5=0$; 4) $x-y=0$; 5) $3x+y+11=0$; 6) $x-3y-3=0$; 7) $x+3y+1=0$; 8) $5x+y+5=0$. **254.** 1) $x+y-3=0$; 2) $x-y-2=0$; 3) $x+3=0$; 4) $18x+7y+12=0$; 5) $4x-7y-23=0$; 6) $8x-14y+31=0$. **255.** 1) 27°, 63°; 2) $\sqrt{45}$; 3) $x+2y+6=0$; 4) $x+2y-6=0$; 5) $x-2y-6=0$; 6) $2x+y+12=0$. **256.** 1) $x-2y-4=0$. **257.** (2; 0). **258.** (1; 8). **259.** 45°. **260.** 1) (2; −1); 2) (−3; 2); 3) (−5; −4); 4) (−9; −10). **261.** 1) (−2; 1); 2) (−15/26; −5/26). **263.** 1) $a=-1/2$, $c=-1$; 2) $a=-2$; $c\in R$; 3) $a=-1/3$, $c\in R$; 4) $a\neq-2/3$, $c\in R$. **264.** 1) (3; 5); 2) не имеют; 3) (7; 9); 4) не имеют. **265.** 1) 3; 2) 4/17. **266.** 1) (4; 3), (−3; −4); 2) (5,4; 4,4), (−1,4; −2,4). **267.** 2; $-\sqrt{2}$. **268.** (−1,6; −1,2). **269.** 1) (2; $\sqrt{3}$), (2; $-\sqrt{3}$); 2) (4; 0), (−4; 0); (0; 2), (0; −2); 3) (−2; $\sqrt{3}$); (−2; $-\sqrt{3}$);

4) $(2;\ \sqrt{3})$, $(2;\ -\sqrt{3})$, $(-2;\ \sqrt{3})$, $(-2;\ -\sqrt{3})$; 5) $(0;\ 2)$, $(0;\ -2)$; 6) $(2\sqrt{3};\ 1)$, $(-2\sqrt{3};\ 1)$, $(0;\ -2)$. **270.** 1) 20; 2) $8\sqrt{2}$. **273.** $(-2;\ -3)$, $(2;\ 3)$, $(-2;\ 3)$. **274.** 1) 5 и 2; 2) 1/3 и 1/4; 3) 1/5 и 1/4. **275.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. **277.** 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$. **278.** 1) 4; 2) 5. **280.** 1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; 2) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$. **283.** 1) B; 2) A, C; 3) C; 4) D. **284.** 1) 160 м и 640 м; 2) 80 м и 554 м; 3) 240 м и 554 м. **285.** 1) $x=3-2t$, $y=-2+3t$; 2) $x=3-t$, $y=-2+2t$. **286.** $x=2+t$, $y=4+2t$. **287.** Указание: выберите систему координат с центром в вершине прямого угла и осями, совпадающими со сторонами угла. В качестве параметра можно взять угол, образованный отрезком с одной из сторон угла. **288.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. **289.** 3,5 м. 3 с.

ГЛАВА 4

295. 1) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{7}\right)\cup\left(-\frac{1}{7};\ +\infty\right)$; 2) $(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 7)\cup(7;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -4)\cup(-4;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$. **296.** $(-\infty;\ 0]$; 2) $[1;\ 3]$; 3) $(-3;\ 1]$; 4) $\varnothing$; 5) $[-3;\ 3]$; 6) $(-\infty;\ -3]\cup[3;\ +\infty)$; 7) $\varnothing$; 8) $[-2;\ 1)$; 9) $[-9;\ -5)\cup(-5;\ 1{,}2)\cup(1{,}2;\ +\infty)$; 10) $[0;\ 25)\cup(25;\ +\infty)$; 11) $(-\infty;\ -5)\cup(-5;\ 1]\cup[6;\ +\infty)$; 12) $[-9;\ -8)\cup(8;\ 10)\cup(10;\ +\infty)$. **297.** 1) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ +\infty)$; 3) $[-1;\ 1]$. **298.** 1) $(-\infty;\ 4)$; 2) $(0;\ 0{,}001)\cup(0{,}001;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ 0)\cup(2{,}5;\ +\infty)$; 4) $[1;\ 3)\cup(4;\ +\infty)$; 5) $(1;\ 2]$. **299.** 1) $x\neq(-1)^k\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z$; 2) $-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z$; 3) $x\neq k\pi,\ k\in Z$; 4) $x\neq k\pi,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$; 5) $(-\infty;\ +\infty)$; 6) $x\neq(2k+1)\pi,\ k\in Z$. **300.** 1) $[1/3;\ 1]$; 2) $(-\infty;\ -1)$; 3) $[1;\ 2]$; 4) $(-\infty;\ 4]$; 5) $[0;\ 4]$; 6) $[\sqrt{2}/2;\ 1]$. **303*.** $y=\sin\frac{\pi t}{4}$. **312.** 1) Четная; 2) четная; 3) не является ни четной, ни нечетной; 4) нечетная; 5) четная; 6) четная; 7) не является ни четной, ни нечетной; 8) нечетная; 9) не является ни четной, ни нечетной; 10) нечетная; 11) четная; 12) не является ни четной; ни нечетной; 13) не является ни четной, ни нечетной; 14) не является ни четной, ни нечетной; 15) нечетная. **317.** 1) $T=\frac{2\pi}{3}$; 2) $T=\pi$; 5) $T=2\pi$; 6) $T=\pi$; 7) $T=\frac{2\pi}{3}$; 8) $T=2\pi$; 9) $T=\pi$; 10) $T=2\pi$. **319.** 1) $y=x$, $y=x$, $y=x+2$, $y=x-2$; 2) $y=(1-2x)^2$, $y=1-2x^2$, $y=x^4$, $y=4x-1$; 3) $y=10^{2x}$, $y=10^{x^2}$, $y=x^4$, $y=10^{10^x}$; 4) $y=\sqrt{\sin x}$, $y=\sin\sqrt{x}$,

$y=\sqrt[4]{x}$, $y=\sin(\sin x)$. **327.** 1) Один; 2) два; 3) один; 4) два; 5) бесконечно много; 6) один; 7) два; 8) ни одного; 9) один; 10) два; 11) один; 12) один. **328.** 1) При $a\leqslant 0$ не имеет решений, при $a>0$ — два решения; 3) при $|a|<1$ не имеет решений; при $|a|\geqslant 1$ бесконечно много решений. **331.** 1) $f(x)=\begin{cases} x \text{ при } 0\leqslant x\leqslant 2, \\ 4 \text{ при } 2<x\leqslant 4.\end{cases}$ 2) $S(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2} \text{ при } 0\leqslant x\leqslant 2, \\ 4x-6 \text{ при } 2<x\leqslant 4.\end{cases}$ **332.** Семь. **334.** 1) $x=-\frac{1}{3}$ — точка разрыва; 2) $x=0$ — точка разрыва; 3) $x=1$ — точка разрыва; 4) $x=0$ — точка разрыва; 5) точек разрыва нет; 6) $x=2$, $x=1{,}5$ — точки разрыва; 7) точек разрыва нет; 8) $x=\pm 10$ — точки разрыва; 9) точек разрыва нет; 10) $x=0$ — точка разрыва; 11) $x=(2k+1)\pi$, $k\in Z$ — точки разрыва; 12) $x=-1$ — точка разрыва. **337.** 1) $(-\infty;\ -1)\cup(2;\ 5)$; 2) $[-1/2;\ 0]\cup[1/2;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -7]\cup[-2/3;\ 1]$; 4) $(-1;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ 0)\cup\{1\}$; 6) $(-\infty;\ -3)\cup(-2;\ +\infty)$; 7) $(-2;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$; 8) $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 0]\cup(1/3;\ 1]$; 9) $(0{,}2;\ 2]$; 10) $(2{,}5;\ 3)\cup(4;\ +\infty)$; 11) $(-\infty;\ -3]\cup[5;\ +\infty)\cup\{1\}$; 12) $[-1;\ 0)\cup(0;\ 1/3]$; 13) $[0;\ 1)\cup(4;\ +\infty)$; 14) $[-46;\ 3)$; 15) $(-4;\ -3)\cup[4;\ +\infty)$; 16) $(5;\ 8]$; 17) $(-\infty;\ -1)\cup(0;\ +\infty)$. **340.** 1) 12; 2) 2; 3) 2^{11}; 4) 1; 5) 1; 6) 0; 7) $-0{,}5$; 8) $-3/4$; 9) 0,5; 10) 1; 11) 3; 12) 0,6; 13) 1; 14) 1/6; 15) 4; 16) 0; 17) $\sqrt{2}$; 18) 2. **341.** 1) 1; 2) 1/3; 3) 2; 4) -5. **346.** 1) 3; 2) 0,5; 3) 0; 4) 0,5; 5) 3; 6) $-5/4$; 7) 0; 8) -1; 9) 10. **347.** 1) 5; 2) 1; 3) 1; 4) 2; 5) 0; 6) 0; 7) 1,25; 0. **348.** 1) $-x^2+3x$; 2) $-\operatorname{tg}^2 x$; 3) 2,5; 4) $\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}+(\sqrt{2})^{x-2}\ln 2$; 5) $e+2$; 7) $\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$; 8) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 9) $\cos x-\sin x$; 10) $3\ln(2/3)$. **349.** 1) $4x^3+6x^2-18x+22$; 2) $e^x\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{2}\right)+\frac{e^2}{2\sqrt{x}}$; 3) 9/16; 5) $\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)$; 6) $\frac{x-2\operatorname{arctg} x}{x^3}$; 8) $\frac{1+10\ln^2 10}{\ln 10}$; 9) $\frac{1}{3}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}+\frac{\ln x}{\cos^2 x}\right)$; 10) $\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{6x\sqrt[3]{x}}$. **350.** 1) $\frac{2x}{(1-x^2)^2}$; 2) $\frac{3}{(x+2)^2}$; 3) $-7/169$; 4) $\frac{1{,}5(0{,}1+6x^2)}{\sqrt{x}(0{,}1-2x^2)^2}$; 5) 0; 6) $2^{x-1}\frac{(x+1)\ln 2-1}{(x+1)^2}$; 7) 6; 8) $-\frac{2}{\pi}$; 9) $\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}$; 10) $-e^{-3}$. **351.** 1) $20(2x+1)^9$; 2) $-12(5-3x)^3$; 3) $-\sin 2x$; 4) $-\frac{9(1-3\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}$; 6) $\frac{5t}{\sqrt{5t^2+1}}$; 7) $\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}$; 8) $\frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}$; 9) $\frac{1}{2x\sqrt{1{,}5+\ln x}}$; 12) $\frac{2(10x-1)}{(x-5x^2+1)^3}$; 13) $\frac{3\sin^2 x}{(1+\cos x)^3}$;

14) $-\frac{\operatorname{ctg} x}{2\sqrt{\sin x}}$; 16) $(0,1)^{0.5x^2+x+0.5}\cdot(x+1)\ln 0,1$; 17) $\frac{e^{\sqrt{x}}+\sqrt{xe^x}}{2\sqrt{x}}$; 18) $\frac{2\ln 10}{(x+1)^2}\cdot 10^{\frac{x-1}{x+1}}$; 20) $-\frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}-3x)\ln 10}$; 21) $\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$; 24) $-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$; 27) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+2x+2\sqrt{x})}$. **352.** 1) $\cos x(1-3\sin^2 x)$; 2) $-2e^{-\varphi}\sin\varphi$; 3) $\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$; 4) $-1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; 5) $\frac{e^{x/(x+1)}}{(x+1)^2}$; 6) $\frac{8}{(3x+1)(x+3)}$; 7) $-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$; 8) $\frac{1}{2}(\sin x+2\cos x)$; 9) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x\ln 10}-1\right)$. **354.** 1) 9 м/с; 2) 6 м/с, 3 м/с; 3) 8,75 м. **355.** 12 м/с. **356.** 1) $3\sqrt{3}/2$ м/с, $3\sqrt{2}/2$ м/с, -3 м/с; 2) $(2k+1)/2$ с, где $k\in Z$. **357.** 1) 49 рад/с, 40 рад/с, 31 рад/с; 2) 5 с. **358.** 1) $t_1=0$, $t_2=8$ с; 2) 8/3 с, 8 с; 3) 108 Дж. **359.** 1) $4\leqslant t\leqslant 6$, $2\leqslant t\leqslant 3$; 2) 3 м/с, 1 м/с; 2 м/с; 3) 2 м/с, 1 м/с, 1,5 м/с. **360.** $-\frac{p_0\ln 2}{5540}\cdot e^{-\frac{\ln 2}{5540}h}$. **362.** $I=6\pi\approx 18{,}8A$. **365.** 1) тупой; 2) острый. **366.** 1) $2x+y+15=0$; 2) $4x+y+16=0$; 3) $6x+y+19=0$, $6x-y-31=0$; 4) $8x-y-40=0$; $8x+y+24=0$; 5) $6x-y-31=0$, $10x+y+31=0$. **367.** 1) $y=3-2x$; 2) $y=-\frac{1}{2}(x+3)$; 3) $y=-\frac{1}{2}(x-5)$. **368.** 1) (3; 5/3); (1; 3); 2) (0; 5/3), (4; 3); 3) $(-1;\ -11/3)$; (5; 25/3). **370*.** $y=6x-13$, $y=2x-5$. **371.** 1) -28; 2) $-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$; 3) 0,064; 5) $9e^{-2}$; 6) $-\frac{25}{3(5x+2)^2}$; 7) $\frac{\cos x}{2}$; 10) 4; 11) $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$. **372.** 1) $-0{,}5$ м/с, 1,5 м/с; 22 м/с, -6 м/с², 12 м/с², 30 м/с²; 2) 3 с; 3) при $t>3$ скорость возрастает; 4) при $0<t<3$ скорость убывает; 5) -6 м/с², 0 м/с², $\approx 19{,}6$ м/с². **374.** 1) $\frac{3}{4}\pi+k\pi$, $k=0, 1, 2, \ldots$; 2) 1 с; 3) ln 10. **375.** 1) 0,18 Н; 2) $-0{,}075$ Н. **380.** 1) $-\frac{dx}{4}$; 2) $(2\cos x-x\sin x)dx$; 4) $\operatorname{ctg} x\,dx$; 6) $\frac{x^2+1}{x^2}\ln 2\cdot e^{(x-1)/x}dx$; 7) dx, $-dx$; 8) $2dx$, $0{,}5dx$. **381.** 1) 1,09; 2) $-0{,}04$; 3) 0,506; 4) 0,9925; 5) 0,036; 6) 0,030. **382.** 1) 1,25; 2) 79, 596; 3) 0,983; 4) 2,00025; 5) 60,175; 6) 87,97; 7) 0,0175; 10) 0,517; 11) $-0{,}02$; 12) 1,003; 13) 0,25; 14) 26,838; 15) 1,07; 16) 0,995; 17) 1,05; 18) 1,070; **383.** 1) 0,24; 2) $-0{,}24$. **384.** 1) 0,36 м; 2) 0,216 м/с. **385.** 0,03 см². **387.** 184 г. **388.** 0,00873. **389.** 0,07. **394.** 1) Возрастает на $(-\infty;\ -1)$, убывает на $(-1;\ +\infty)$; 2) возрастает на $(-\infty;\ 1/2)\cup(1;\ +\infty)$, убывает на $(1/2;\ 1)$, $x=1/2$ — точка максимума, $x=1$ — точка минимума; 3) возрастает на $(-\infty;\ -1)\cup(3;\ +\infty)$, убывает на $(-1;\ 3)$, $x=-1$ — точка максимума, $x=3$ — точка минимума; 4) убывает на $(-\infty;\ -3)\cup(-1;\ 0)$,

возрастает на $(-3; -1) \cup (0; +\infty)$, $x=-3$, $x=0$ — точки минимума, $x=-1$ — точка максимума. 5) убывает на $(-\infty; 1)$, возрастает на $(1; +\infty)$, $x=1$ — точка минимума; 7) убывает на $(-\infty; -1)$, возрастает на $(-1; +\infty)$, $x=-1$ — точка минимума; 8) убывает на $(-\infty; 1/2)$, возрастает на $(1/2; +\infty)$, $x=1/2$ — точка минимума; 10) возрастает на $(0; \pi/4)$, убывает на $(\pi/4; \pi)$, $x=\pi/4)$ — точка максимума; 12) возрастает на $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, убывает на $(-1; 0) \cup (0; 1)$, $x=-1$ — точка максимума, $x=1$ — точка минимума; 13) возрастает на $(-\infty; 3)$; 14) возрастает на $(-1; 0)$, убывает на $(0; 1)$, $x=1$ — точка максимума; 15) убывает на $(-\infty; -1)$, возрастает на $(1; +\infty)$; 16) возрастает на $(1/2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 1/2)$; 17) убывает на $(0; e)$, возрастает на $(e; +\infty)$, $x=e$ — точка минимума; 18) возрастает на $(0; +\infty)$. **395.** 1) $|a| \leqslant 1$; 2) ни при каком a. **396.** При $a=1$ в точке $x=1$ функция имеет минимум. **399.** 1) Выпукл вверх на $(-\infty; 0)$, выпукл вниз на $(0; +\infty)$, $x=0$ — абсцисса точки перегиба; 2) выпукл вверх на $(-\infty; 1)$, выпукл вниз на $(1; +\infty)$, $x=1$ — абсцисса точки перегиба; 3) выпукл вверх на $(-\infty; 2)$, выпукл вниз на $(2; +\infty)$, $x=2$ — абсцисса точки перегиба; 4) выпукл вверх на $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$, выпукл вниз на $(-3; 2)$, $x=-3$, $x=2$ — абсциссы точек перегиба; 5) выпукл вверх на $(-\infty; -1)$, выпукл вниз на $(-1; +\infty)$, $x=-1$ — абсцисса точки перегиба; 6) выпукл вверх на $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3})$, выпукл вниз на $(-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$, $x=\pm\sqrt{3}$, $x=0$ — абсциссы точек перегиба; 7) выпукл вниз на $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; выпукл вверх на $(0; 1)$, $x=0$, $x=1$ — абсциссы точек перегиба; 8) выпукл вверх на $(-\infty; 0)$, выпукл вниз на $(0; +\infty)$; 9) выпукл вверх на $(0; +\infty)$; 10) выпукл вверх на $(-\infty; 0)$, выпукл вниз на $(0; +\infty)$, $x=0$ — абсцисса точки перегиба; 11) выпукл вверх на $(0; e^{-3/2})$, выпукл вниз на $(e^{-3/2}; +\infty)$, $x=e^{-3/2}$ — абсцисса точки перегиба; 12) выпукл вниз на $(0; 2)$, выпукл вверх на $(2; +\infty)$, $x=2$ — абсцисса точки перегиба. **400.** $|a| \leqslant 2$. **409.** 1) Один; 2) два; 3) два. **412.** 1) $\max\limits_{[0,1]} f(x)=f(1)=1$, $\min\limits_{[0,1]} f(x)=f(0)=-1$; 2) $\max\limits_{(0,1]} f(x)=f(1)=1$; 3) $\max\limits_{[1;4]} f(x)=f(1)=3$, $\min\limits_{[1;4]} f(x)=f(3)=-1$; 5) $\min\limits_{(1;+\infty)} f(x)=f(3)=-1$; 6) $\max\limits_{[-1,1]} f(x)=f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{88}{9}$; $\min\limits_{[-1,1]} f(x)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{56}{9}$; 7) $\max\limits_{[0,1]} f(x)=f(1)=8$, $\min\limits_{[0,1]} f(x)=f(0)=1$; 8) $\max\limits_{[-2,1]} f(x)=f(-2)=17$, $\min\limits_{[-2;1]} f(x)=f(-1)=0$; 9) $\min\limits_{(-\infty;+\infty)} f(x)=f(-1)=0$; 10) $\min\limits_{[-\pi,\pi]} f(x)=f(\pi)=2\pi$; $\min\limits_{[-\pi,\pi]} f(x)=f(-\pi)=-2\pi$; 11) $\max\limits_{[\pi/4,2\pi/3]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$; $\min\limits_{[\pi/4;2\pi/3]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 12) $\max\limits_{[0;\pi]} f(x)=f(0)=0$; $\min\limits_{[0,\pi]} f(x)=f(\pi)=-\frac{\pi(3+\pi^2)}{3}$; 13) $\max\limits_{[0,1,10]} f(x)=f(0,1)=f(10)=10,1$; $\min\limits_{[0,1;10]} f(x)=f(1)=2$; 14) $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=2$;

15) $\max\limits_{[-2,2]} f(x)=f(-1)=\frac{1}{3}$, $\min\limits_{[-2,2]} f(x)=f(1)=-1$; 16) $\max\limits_{[e^{-1},e]} f(x)=f(e)=0$; $\min\limits_{[e^{-1},e]} f(x)=f(1)=-1$; 18) $\min\limits_{[-2;+\infty]} f(x)=f(-1)=-1$. **414.** 1) $\max\limits_{[0;1]} |x(t)|=17/3$ м, $\min\limits_{[0;1]} |x(t)|=0$; 2) $\max\limits_{[0;2]} v(t)=9$ м/с, $\min\limits_{[1;2]} v(t)=5$ м/с, $\max\limits_{[0;5]} v(t)=9$ м/с, $\min\limits_{[0;5]} v(t)=0$ м/с; 3) $\max\limits_{[1;2]} x''(t)=2$ м/с^2, $\min\limits_{[1;2]} x''(t)=0$ м/с^2. **415.** 1. **416.** 2×2 м. **417.** 18,90, 54. **418.** Каждая из сторон прямоугольника равна половине параллельного ей катета. **420.** 60°. **421.** $r_1=r_2=\frac{R}{2}$. **422.** Отрезок разрезать пополам. **423.** 1) $2y+x-6=0$; 2) $4y+x-8=0$.

ГЛАВА 5

425. 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) да; 5) да; 6) да. **426.** 1) 2; 2) $2x+9{,}8$; 3) $\ln x$; 4) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}$; 5) $((x+1)^4-1)/256$; 6) $9-4\cos((x+\pi)/4)$; 7) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{2}x\sqrt[3]{x}-\frac{2}{3}$; 8) $e^x-\cos x+\sqrt{2}$. **427.** 1) $y=1$; 2) $y=x-1$; 3) $y=\frac{x^2}{2}-1$; 4) $y=(x^3-5)/3$. **428.** 1) $x=t^3+t$; 2) $x=t^3+t+0{,}5$. **429.** 1) $v=-gt+15$; $h=-\frac{gt^2}{2}+15t$; 2) $v\approx -5$ м/с, $h\approx 10$ м. **430.** $\omega=2e^{-0{,}04t}+0{,}5$. **432.** 1) $4x\sqrt[4]{x^3}+C$; 2) $\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}+4x+C$; 3) $t+\frac{1}{5}\ln|t|-\frac{3}{2t}+C$; 4) $2x+\frac{x^3}{6}+C$; 7) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{5^t}{\ln 5}+\frac{t^2}{2}\right)+C$; 8) $\frac{y^6}{6}+2y^4+\ln|y|+C$; 9) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+4\sqrt{x}+\ln|x|+C$; 10) $6^x/\ln 6+C$; 11) $\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{1}{2^x\ln 2}+C$; 12) $3e^x+\sin x+C$; 13) $\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x+C$; 14) $\frac{x^2}{2}-x+C$; 15) $\frac{1}{9}\left(4u-4\ln|u|-\frac{1}{u}\right)+C$; 16) $-\frac{x^3}{3}-x^2-4x+C$; 17) $\frac{1}{6}(e^x+2x)+C$; 18) $\sqrt{x}/2+C$; 19) $\sin\theta-\cos\theta+C$; 20) $-\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x+C$; 21) $\frac{1}{4}(\varphi-\sin\varphi)+C$. Указание: перейдите к тригонометрическим функциям двойного аргумента. 22) $\operatorname{tg} x-x+C$; 23) $-\frac{1}{2}\cos t+C$; 24) $-(\cos x)/2+C$; 25) $x-\cos x+C$; 26) $(\operatorname{tg}\psi)/2+C$; 27) $\sin x-x+C$. Указание: разложите на множители числитель. **433.** 1) $(x+4)^9/9+C$; 2) $2\ln|x+1|+C$; 3) $\frac{2}{3}(t-1)\sqrt{t-1}+C$; 4) $\frac{1}{4}\ln|4x+1|+C$; 5) $\frac{1}{495(2-5y)^{99}}+$

$+C$; 6) $-4\sqrt{1-\frac{x}{2}}+C$; 8) $-2\cos\frac{2x-1}{4}+C$; 9) $4e^{(x-1)/2}+C$;
10) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x+C$; 11) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{2}\right)+C$; 12) $-\frac{1}{7}\operatorname{tg}(3-x)+C$;
13) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{2}y+C$; 14) $x+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}x+1}+C$; **434.** 1) $-\frac{1}{12}\cos 6\varphi+C$;
2) $x-\frac{1}{4}\cos 4x+C$; 3) $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{12}\cos 6x+C$. Указание: преобразуйте произведение тригонометрических функций в сумму;
4) $3\left(\cos\frac{x}{6}-\frac{1}{5}\cos\frac{5x}{6}\right)+C$; 5) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$. Указание: перейдите к тригонометрическим функциям двойного аргумента.
6) $-\frac{1}{16}\cos 4x+C$. **435.** 1) $y=3x-0{,}1x^2+0{,}7$; 2) $y=e^x+6$; 3) $y=\frac{1}{2}\ln(2x+1)+7$. **436.** $x_1=t^2-1$; $x_2=\frac{10}{3}t^2+10t-\frac{40}{3}$; $x_3=30t-3t^2-27$.
438. $x=0{,}3t^2$. **439.** 1) $v=0{,}75t^2+3$; 2) $x=0{,}25t^3+3t+2{,}75$. **440.** $v(t)=\begin{cases}(\sqrt{t+1}-1)/2 & \text{при } 0\leqslant t\leqslant 3,\\ 1/2 & \text{при } t>3.\end{cases}$ **441.** 1) $-2{,}5$ м; 2) $5/6$ м, $-3\frac{2}{3}$ м;
3) $-17/12$ м. **443.** 1) $\frac{1}{2}\ln(x^2+9)+C$; 2) $\frac{1}{9}(3y^2+1)\sqrt{3y^2+1}+C$;
3) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$; 4) $\frac{0{,}1}{(1-5x^3)^2}+C$; 5) $\frac{2}{3}\sin\varphi\sqrt{\sin\varphi}+C$; 6) $-3\sqrt[3]{\cos x}+C$;
7) $-\ln|\cos\theta|+C$; 8) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\operatorname{tg}x+C$; 9) $e^{\operatorname{tg}x}+C$; 10) $4\cos x(\cos^2 x-3)/3+C$. Указание: $\sin^3 x=(1-\cos^2 x)\sin x$; 11) $(1+e^t)^{21}/21+C$;
13) $\frac{2}{3}\ln y\sqrt{\ln y}+C$; 14) $\frac{2}{3}\ln^3 x+3\ln x+C$; 15) $(\operatorname{arctg}^2 u)/2+C$. **444.** 1) $\frac{(2x+1)^{3/2}(3x-1)}{15}+C$; 2) $\frac{-(1-x)^{3/2}(15x^2+54x+71)}{210}+C$; 3) $\frac{4}{15}(3x+2)^{5/3}+\frac{1}{6}(3x+2)^{2/3}+C$; 4) $\frac{4x-5}{4(5-2x)^2}+C$; 5) $\ln|x-1|+x+\frac{x^2}{2}+C$;
6)* $(\sqrt{x}-1)^2+2\ln(1+\sqrt{x})+C$. **445.** 1) $\frac{4{,}5}{3-2x}+C$; 2) $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(t/\sqrt{2})+C$;
3) $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+5}{\sqrt{5}}+C$; 4) $\frac{1}{2}\ln|x^2+10x+30|+C$; 5) $-\frac{1}{3}(5-4x-x^2)^{3/2}+C$;
6) $-2\cos x+C$; 8) $\frac{1}{2}\sin(x^2+1)+C$; 10) $\frac{11}{8}\psi+\frac{9}{32}\sin 4\psi-\frac{3}{4}\sin 2\psi+C$;
11) $\sin x+\cos x+\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{2}{3}\cos^3 x+C$; 12) $\frac{3}{8}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta+\frac{1}{32}\sin 4\theta+C$;

13) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin(4x+2)+C$; 14) $2(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})+C$; 15) $-\mathrm{arctg}(\cos y)+$ $+C$; 16) $\frac{x^2}{2}-5\cos x+\frac{5}{3}\cos^3 x+C$; 17) $\mathrm{arctg}(e^x)+C$; 18) $\frac{4}{3}\left(\frac{e^x+1}{2}\right)^{3/2}+C$;

19) $\ln(\ln t)+C$; 20) $-\frac{3}{7}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{4/3}(2x+3)+C$; 21) $\frac{8}{49}\ \frac{7x+4}{\sqrt{7x+2}}+C$;

22) $z+\ln|z+1|+C$; 23) $\frac{1}{9}(3x-\ln|3x+2|)+C$; 24) $\frac{1}{39}(5+3x)^{13}+C$. **446.** 1) $2t-4\ln|t+2|+C$; 2) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$. Указание: представьте числитель как $1=\frac{1}{5}((x+2)-(x-3))$; 3) $\frac{1}{7}\ln|(u/(u+7))|+C$; 4) $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$; 5) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|+C$; 6) $\frac{2}{\sqrt{15}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{15}}+C$. **447.** 1) 2; 2) 2/5; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $2\sqrt{2}$; 5) 1/2; 6) 1/2; 7) 0; 8) 1. **449.** 1) −54 м; 2) 10 м; 3) 54 м. **452.** 9 Кл. **453.** 1) −69/64; 2) 2,625; 3) $3\sqrt[3]{2}-4$; 4) 2/3; 5) 4,5; 6) 1; 7) −1; 9) 3/8; 10) 1; 11) $\frac{\pi}{2}$; 12) −1/2; 14) $\frac{8}{3\ln 3}-\frac{3}{2\ln 2}$; 15) $1+e-(1/e)$. **454.** 1) 13/6; 2) 1; 3) 2; 4) 2; 5) 4. **455.** 1) >0; 2) >0; 3) <0; 4) <0; 5) >0; 6) >0. Указание: установите знак подынтегральной функции на промежутке интегрирования. **458.** 1) 9 м; 2) 11/3 м; 3) 32/3 м; 4) 8/3 м/с; 5) 0; 6) 64/3 м. **459.** 1) ≈1995 м; 2) ≈1980 м; 3) ≈20 с. **460.** ≈13,25 м. **461.** 50 м. **462.** 1) 0; 2) 4 м. **463.** 1) 30 рад/с; 2) 50 рад. **464.** $1/\pi\approx 0{,}32$ *А*. **465.** 1) 0,1; 2) 1; 3) ln(3/4); 4) $e-1$; 5) $2^{-5/2}$; 6) $-\pi/60$. **466.** 1) $\pi/12$; 2) 2/3; 3) $(l-1)^{11}/11$. **467.** 1) 3/4; 2) 8/3; 3) −2/3; 4) (ln 2)/2; 5) $(8-\sqrt{3})/3$. **468.** 1) $\frac{1}{2}+\frac{\ln 4}{3}$; 2) $2(1+2\ln(2/3))$; 3) 14/45. **469.** 1) 17/9800; 2) 1/2; 3) −(ln 3)/6; 4) $\sqrt{3}-1$; 6) 14/207; 7) 11,2; 8) 78,1; 9) $2\pi/9$; 10) $\pi/4$; 11) $2/\sqrt{3}$; 12) −8/15; 13) $1/\sqrt{3}$; 14) 1/2; 15) 11; 16) $2(1-\ln 2)$; 17) 2; 18) 0. **477.** 1) 32/3; 2) 6; 3) 7/6; 4) 1; 5) $5-e^{-4}$; 6) 16/3; 7) 0,5; 8) 0,5. **478.** 1) 3,5; 2) 2; 3) 1; 4) 131/12; 5) 17/15; 6) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{24}$. **479.** 1) 4,5; 2) 11/12; 3) 71/3; 4) ln 2 − 0,5; 5) $8+2\sqrt{2}$; 6) 8. **482.** 1) 52/3; 2) 4/3; 4) $e-(1/e)$. **483.** 1) 8; 2) 12; 4) $e+(1/e)$; 5) 4,5; 6) 4; 7) 64/3; 8) $\pi-2$; 9) $(\pi^2/2)-2$; 10) 10/3. **484.** 1) $\frac{2}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 2}$; 2) $\sqrt{2}/3$; 3) 4/3; 4) 8; 5) 14; 6) 9; 7) 7/3; 8) $2-\sqrt{2}$; 9) $2\sqrt{2}$; 10) 7/6. **485.** 1/3. **486.** $e-2{,}5$. **487.** ln 3. **488.** ln 3 − 0,5. **489.** 1) $\pi/4$; 3) 0. **490.** 4/3. **491.** 0. **492.** 1. **493.** 0,4 м². **494.** ≈624 кг. **495.** ≈0,6 кг. **496.** 2 ln 3,7 ≈ 2,62 Кл. **498.** ≈0,59 Дж.

499. 0,625 Дж. **500.** 0,09 м. **501.** $\approx 6{,}6 \cdot 10^2$ Дж. **503.** $\approx 1{,}9 \cdot 10^6$ Н. **504.** 1) $\approx 1{,}5 \cdot 10^4$ Н; 2) $\approx 5 \cdot 10^3$ Н. **505.** 1) $\approx 0{,}24$ Н; 2) $\approx 0{,}55$ Н; 3) $\approx 0{,}12$ Н; 4) $\approx 0{,}12$ Н. **506.** ≈ 23 Н. **507.** ≈ 508 Дж.

ГЛАВА 6

510. 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) да; 6) да. **511.** 1) 2; 2) 6; 3) 1; 4) -1; 5) 3; 6) -1. **512.** Указание: продифференцируйте функцию и исключите константу C из производной (если она в ней содержится). **513.** 1) 2; 2) -2; 3) 3; 4) -1. **514.** Указание: сравните угловые коэффициенты касательных в указанных точках. **515.** 1) $3x+C$; 2) $\frac{x^2}{2}+C$; 3) $-2x^2+C$; 4) $-\frac{3}{2}x^2+2x+C$; 5) $x^{2/3}+C$; 6) $\frac{1}{2}t^4+\frac{3}{2}t^2+5t+C$; 7) $\ln|t+1|+C$; 8) $4\sin t+C$; 9) $\frac{1}{2}x^2-\cos x+C$; 10) $-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$; 11) $\frac{1}{4}x^2-\ln|\cos x|+C$; 12) C; 13) $2k\pi x+C$, $k\in Z$. **517.** 1) x^3+x^2+x+1; 2) $-\frac{2}{x^2}+4$; 3) $-\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{17}{18}$; 4) $\frac{2}{3}e^{3x/2}+x-{}^8/_3$; 5) $2t^4-\frac{1}{9}t^3+3t+3$; 6) $-2t-1$. **519.** 1) $\frac{4}{3}x^3+4x^2-\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{2}{x+1}+6$; 3) $\sqrt{(2x-1)^3}+4$; 4) $-\cos(x-1)+6$. **520.** 1) $2t^2-2$; 2) t^3+t; 3) $18t-\frac{2}{3}t^3-24$ или $18t-\frac{2}{3}t^2-48$. **521.** 1) $t-2t^2+3$; 2) -187; 3) 0,25 с; 4) 4,6 с. **522.** 1) $v'=-kv$, $k>0$; 2) $m'=km$, $k>0$; 3) $Q'=-kQ$, $k>0$; 4) $N'=kN$, $k>0$; 5) $T'=-k(T-T_1)$, $k>0$. **523.** Да; e^{kx}; $\frac{1}{4}\ln 6$. **524.** 1) $x_0 e^{\frac{1}{10}\ln\frac{1}{2}\cdot t}$; 2) уменьшится в 2^{10}; 3) 66 с. **525.** $v=5\cdot 0{,}4^t$, где v — скорость, м/с; t — время, с; $v(4)\approx 0{,}13$ м/с, $t\approx 1{,}8$ с. **526.** $\omega=12\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{t/40}$, где ω — угловая скорость, рад/с; t — время, с, $\omega(120)\approx 3{,}6$ рад/с, $t\approx 245$ с. **527.** 50. **528.** $Q=2000\cdot 0{,}925^{t/2}$, где Q — количество заряда, Кл; t — время, мин; 18 мин. **529.** 8,5%. **530.** 0,9 г. **531.** 1,8 млн. руб. **532.** 1) 204; 213; 248; 253; 262; 272; 2) 11%; 7%, 0,1%, 0,2%, 0,1%, 0,3%. **533.** 2) Нет; 3) а) $-\frac{1}{x-2}$; б) $y=0$. **534.** 1) Ce^x; 2) $\sqrt[3]{\frac{x^3}{3}+x+C}$; 3) $Ct-1$; 4) $C\sqrt{x^2+1}$; 5) $\left(\frac{1}{2x}+C\right)^2$, $y=0$; 6) Ce^{t^2}; 7) $Ce^{2x}+\frac{1}{2}$; 8) $Ce^{-x}+2$; 9) $Ce^{ax}-\frac{b}{a}$; 10) $-\frac{1}{kt+C}$, $v=0$. **535.** 1) $y=3x$; 2) $\sqrt[3]{\frac{x^3}{3}-8}$; 3) $\ln\frac{x^2+1}{2}$; 4) $5e^t-2$; 5) $5x$; 6) $4x-5$; 7) $8\cos x$;

8) $3e^{kx}$; 9) $\frac{b}{a}(e^{ax}-1)$; 10) $v_0 e^{kt}$. **537.** 1) e^{x+2}; 2) $-\frac{1}{x+1}$; 3) $\frac{1}{4}x^2$; 4) $-\frac{2}{x}$.

538. $y'=-5\cdot 10^{-2}(y-40)$, где y — количество азота, л. **539.** 1) $x=10(4-e^{-0,05t})$, где x — количество азота, л, t — время, с; 2) 38 л.

540. 60 мин. **541.** $v=\frac{g}{4}(1-e^{-4t})$, где v — скорость, м/с; g — ускорение свободного падения, м/с^2; t — время, с; $v(2)=2{,}4$ м/с, $v(10)=2{,}5$ м/с. **542.** 1) -3; 2) -2; 3) ни при каком. **543.** 1) $-2/x$, $-4/x$; 2) $-\mathrm{ctg}\,x$, $\mathrm{ctg}\,x$. **544.** 1) $Ce^{-x}+2$; 2) $\frac{2}{3}x^5+Cx^2$; 3) x^4+Cx^3; 4) $\frac{1}{3}e^x+Ce^{-2x}$; 5) $-\frac{1}{4}e^{-t}+Ce^{3t}$; 6) $\frac{1}{2}e^{x^2}+Ce^{-x^2}$; 7) $\frac{\sin x+C}{1+x}$; 8) $\sin x+C\cos x$; 9) $(x+1)^2\times\times\left(\frac{x^2}{2}+x+C\right)$. **545.** 1) $e^{2x}-1/2$; 2) $2x^3-x^2$; 3) $e^x+4e^{x/2}$; 4) $(x-2)e^{x^2}$; 5) $t^3(e^{t-1}-3)$; 6) $x\sin x$; 7) $\frac{1}{2x}-\frac{1}{x}\cos x$; 8) $-\frac{4}{x^2}(x+1)$. **546.** $q=10^{-5}(1-e^{-10^4\cdot t})$, где q — заряд, Кл, t — время, с; 2) 10^{-5} Кл. **547.** 1) $I=20(1-e^{-5t})$, где I — сила тока, А; t — время, с; 2) 20 А; 3) 0,92 с. Указание: воспользуйтесь законом Кирхгофа $LI'+RI=U$, где I — сила тока в цепи. **548.** 1) $5\cdot 10^{-6}$ А; 2) $\frac{U_0}{4}$ А. См. указание к задаче 547. **549.** Указание: воспользуйтесь методом подстановки. Докажите, что функция $I=\frac{U_0}{L}e^{-Rt/L}\cdot\int e^{Rt/L}\sin t\,dt$ периодична. **550.** 1) $x^2+C_1x+C_2$; 2) $-\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2$; 3) $\frac{t^2}{2}+2\sin t+C_1t+C_2$; 4) $\frac{1}{4}e^{2t}+C_1t+C_2$; 5) $\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}\cos 2x+C_1x+C_2$; 6) $\frac{1}{2}e^{-x}+C_1x+C_2$; 7) $-\frac{1}{m\omega^2}\cos\omega t+C_1t+C_2$; 8) C_1x+C_2; 9) $\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$. **552.** 1) t^3-2t^2+2t+1; 2) x^4; 3) $\frac{1}{9}e^{3x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}$; 4) $-\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{2}t$. **553.** $-x^3+3x^2-2x+5$. **554.** 1) $x''=12t-1$, где x — положение точки в момент t; 2) $x=2t^3-\frac{1}{2}t^2+10t$; 3) $x(3)=79{,}5$; $v(3)=61$ м/с; 4) $t=\frac{1}{12}$ с; 5) 0,25 с. **555.** 1) $x''=\frac{3}{2}$, где x — положение точки, м. 2) $x=\frac{3}{4}t^2+v_0t$; 3) 2 м/с; 4) $9{,}12\cdot 10^4$; 5) 12 с. **556.** Через 100 с; 1 км. **557.** 1) $x=-\frac{3}{25}\cos 5t$, x — положение точки, м, t — время, с; 2) 10 см;

3) да; 4) нет. **558.** 1) $y=\frac{kP}{2}\left(lx^2-\frac{1}{3}x^3\right)$; 2) 72 см; 3) 6 м. **559.** 1) $C_1e^{-t}+C_2$; 2) $\ln|C_2(t+C_1)|$; 3) $C_1e^{-0.1x}+C_2$; 4) $-2\ln|C_2(t+C_1)|$; 5) $C_1e^{2t}+5t+C_2$; 6) $C_1e^{-t}-10t+C_2$. **560.** 1) $1-e^{-2t}$; 2) $x^2+4x-10$; 3) $\ln|t|+2$. **561.** 1) $x=40(1-e^{-0.035\cdot t})$; 2) 12 м. **562.** 1) $\frac{1000}{3}\ln|0{,}12t+1|$; 2) 1,2 км. **563.** 1) $x=C_1\cos 4t+C_2\sin 4t$; 2) $\varphi=C_1\cos\sqrt{13}\,t+C_2\sin\sqrt{13}\cdot t$; 3) $s=C_1\cos 0{,}2t+C_2\sin 0{,}2t$; 4) $y=C_1\cos\frac{x}{3}+C_2\sin\frac{x}{3}$.
564. 1) $y=\sin 2x-\cos 2x$; 2) $x=\sin 5t-3\sqrt{3}\cos 5t$; 3) $y=\cos 3x$; 4) $x=2\cos\frac{t}{2}+\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}$. **566.** 1) $y''+4y=0$; 2) $x''+16x=0$; 3) $y''+4y=0$; 4) $x''+81x=0$. **567.** $y_0\cos(\sqrt{k/m}\cdot t)+\sqrt{m/k}\,v_0\sin(\sqrt{k/m}\cdot t)$. **568.** $Q_0\cos(t/\sqrt{LC})$. Указание: воспользуйтесь законом Кирхгофа: $LQ''+(Q/C)=0$ и условием $Q'(0)=0$. **569.** 1) Нет; 2) да; 3) да. **571.** 1) $C_1+C\ e^{-3x}$; 2) $C_1e^{4x}+C_2e^{-2x}$; 3) $(C_1+C_2x)e^{-7x}$; 4) $e^{-3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)$; 5) $C_1e^{-5x}+C_2e^{-3x}$; 6) $C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}$. **572.** 1) $1+0{,}5e^{2x}$; 2) $e^{-x}-2e^{-2x}$; 3) $e^{-4x}(1+5x)$; 4) $\cos 3x+2\sin 3x$; 5) $e^{-x}(\cos 2x+\sin 2x)$; 6) $\frac{3}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}$; 7) $e^{-2x}(2+5x)$; 8) $2e^{4x}\cos 2x$.
573. $y_0(3{,}5e^{-25t}-2{,}5e^{-35t})$. Указание: используя закон Ньютона, составьте дифференциальное уравнение $my''=-k_1y-k_2y'$ и решите его, пользуясь начальными условиями: $y(0)=y_0$, $y'(0)=0$. **574.** $\frac{\sqrt{10}}{3}Q_0e^{-\omega t}\cdot\cos(30t+\varphi)$, где $\varphi=\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$. Указание: воспользуйтесь законом Кирхгофа: $LQ''+RQ'+\frac{1}{C}Q=0$ и условием $Q'(0)=0$.

ГЛАВА 7

575. 0,92; 800. **576.** 16. **577.** 480. **578.** 0,85; 850. **580.** 1) {(1,2); (1,3); (1,4); (2,3); (2,4); (3,4)}; 2) {12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43}; 3) {3, 4, 5, 6, 7}. **581.** $\{(a, a); (a, A); (A, a); (A, A)\}$. **583.** {Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ, ЦЦЦЦ}. **584.** 1) $U=$ {ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ}; $A=$ {ЦГ, ЦЦ}; $B=C=$ {ЦГ, ГЦ}; $D=$ {ГЦ, ЦГ, ГГ}; $E=$ {ГГ, ЦЦ}; 3) $p_i=\frac{1}{4}$, $i=1, ..., 4$; 4) $P(A)=P(B)=P(C)=P(E)=\frac{1}{2}$; $P(D)=\frac{3}{4}$.
585. $P(A)=\frac{2}{3}$; $P(B)=\frac{1}{3}$. **586.** 1) 4/9; 2) 5/9; 3) 4/9; 4) 2/9.
587. 1) $U=\{(i, k),\ i,\ k=1, ..., 6\}$, $A=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$; $B=\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$; $C=\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$; $D=\{(1,2), (2,1), (1,5),$

(5,1), (2,4), (4,2), (3,3), (3,6), (6,3), (4,5), (5,4), (6,6)}; 4) $p_i=\frac{1}{36}$; $i=1,2, ..., 36$. **588.** 1) $U=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; 2) $p(2)=p(12)=\frac{1}{36}$; $p(3)=p(11)=\frac{1}{18}$; $p(4)=p(10)=\frac{1}{12}$; $p(5)=p(9)=\frac{1}{9}$; $p(6)=p(8)=\frac{5}{36}$; $p(7)=\frac{1}{6}$; 3) $\mathsf{P}(G)=\frac{1}{12}$; $\mathsf{P}(H)=\frac{1}{2}$. **589.** $U=\{11, 10, 01, 00\}$, где 10, например, озиачает, что опрашиваемый положительно ответил на первый вопрос и отрицательио на второй, $p(11)=0{,}4$; $p(10)=0{,}3$; $p(01)=0.2$; $p(00)=0{,}1$; 1) 0,7; 2) 0,6. **590.** $U=\{0, 1, 2\}$; $p(0)=0{,}6$; $p(1)=0{,}3$; $p(2)=0{,}1$. 1) 0,4; 2) 0,9. **591.** 1) $U=\{1, 2, 3\}$, $p_i=\frac{1}{3}$, $i=1, 2, 3$; 2) $U=\{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$, 1/9. **592.** 1) 0,4. **593.** 0,7. **594.** 5/6. **595.** Mn/m. **596.** 1) 0,89 и 0,84; 2) 0,08 и 0,12; 3) 0,02 и 0,04; 4) 0,01 и 0. **597.** 1) 8; 2) 6; 3) 24. **598.** 49; 42. **599.** Да. **600.** 1) 16; 2) 12. **601.** 1) 90; 2) 81; 9; 3) 25; 20; 4) 16. **602.** 1) 20^5; 2) 1860480; 3) 15504. **603.** 20 га. **604.** 1) 0,6561; 2) 0,504; 3) 0,9. **605.** 1) 0,001; 2) 0,01; 3) 0,72; 4) 0,125. **606.** 1) 1/60; 2) 0,4; 3) 0,6; 4) 0,2. **607.** 1) $(0{,}94)^2$; 2) 0,0036; 3) 0,0564. **608.** 1/3. **609.** 1) 2/21; 2) 3/7; 3) 10/21. **610.** 1) 24/91; 2) 2/91; 3) 45/91; 4) 67/97. **611.** 1) $\frac{C_M^k}{C_{M+N}^k}$; 2) $\frac{C_N^k}{C_{M+N}^k}$; 3) $\frac{C_M^n C_N^{k-n}}{C_{M+N}^k}$. **612.** 1/12. **613.** 1) 0,2; 2) 2/9. **616.** 1) 1/8; 2) 1/8; 3) 7/8. **617.** 1) 2/3; 5/36; 13/36; 2) 5/9. **618.** 0,97. **619.** 0,2. **620.** 0,68. **621.** 1) 0,8; 2) 0,2. **622.** 4) 0,1. Указание: используя геометрическую интерпретацию действий иад событиями, покажите предварительио, что $B=(\bar{A}\cap B)\cup(A\cap B)$. **623.** 1) $\approx 0{,}283$; 2) $\approx 0{,}751$; 4) $\approx 0{,}968$. **624.** 29/38. **625.** 0,65. **626.** 0,9. **628.** 1) Да; 2) да; 3) ист; 4) да. **629.** Нет. **630.** Зависимы. **631.** 1) $\approx 0{,}998$; 2) 0,001998; 3) 10^{-6}. **632.** 1) 0,046; 2) 0,004; 3) 0,076; 4) 0,874. **633.** 1) 0,16; 2) 0,96; 3) 0,008. **634.** 1) $U=\{(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (2,3); (3,1); (3,2), (3,3)\}$; 2) $A=\{(1,1); (2,2); (3,3)\}$; $B=\{(2,2); (1,3); (2,3); (3,1); (3,2); (3,3)\}$; $C=\{(2,1); (3,1); (3,2)\}$; $D=\{(1,2); (1,3); (2,1); (2,3); (3,1); (3,2)\}$; 4) $p(1,1)=0{,}25$; $p(1,2)=p(2,1)=0{,}15$; $p(1,3)=p(3,1)=0{,}1$; $p(2,3)=p(3,2)=0{,}06$; $p(2,2)=0{,}09$; $p(3,3)=0{,}04$; $P(A)=0{,}38$; $P(B)=0{,}45$; $P(C)=0{,}31$; $P(D)=0.62$; $P(E)=0{,}55$; $P(F)=0{,}75$. **635.** 1) 2/3; 2) 1/3; 3) 1/2. **636.** 2/3. **637.** 1) 1/2; 2) 1. **638.** 1) 3/11; 2) 5/22; 3) 5/22; 4) 6/11; 5) 17/22; 6) 1/2. **639.** 1) 0,02; 2) 0,016; 3) 0,036. **640.** 0,028. **641.** 0,006. **642.** 0,52. **643.** 0,45. **644.** 1) 5/8; 2) 1/2; 3) 3/4; 4) 5/8. **645.** 1) 0,2; 2) 0,9; 3) 0,3; 4) 3.

647. 1)

0	1
0,3	0,7

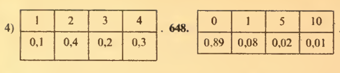
; 2)

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

; 3)

0	1	2	3
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

;


4)

1	2	3	4
0,1	0,4	0,2	0,3

. **648.**

0	1	5	10
0,89	0,08	0,02	0,01

.

649. 1)

0	1	2
0,6	0,3	0,1

; 2)

0	1	2	3	4
0,36	0,36	0,21	0,06	0,01

.

650. 1)

−15	−5	10
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

; 2)

−30	−20	−10	−5	5	20
$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

.

651. 1)

1	2	3	4
0,6	0,24	0,096	0,064

; 2) 0,16.

652.

1	2	3
0,7	0,21	0,09

. **653.**

0	1	2
$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$

.

654.

0	1	2
$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

. **655.**

0	1	3
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

.

656. 1) $3{,}96\cdot 10^{-6}$; 2) 0,999; 3) 0,0394. **657.** 0,2646. **658.** Три из четырех. **659.** 0,384. **660.** 1) 5/16; 2) 13/16; 3) 31/32. **661.** 0,867.

662.

0	1	2	3
0,001	0,027	0,243	0,729

.

663.

0	1	2	3
0,729	0,243	0,027	0,001

; 0,028.

664.

0	1	2	3
$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

. **665.** 0,2. **667.** Не менее двух.

668. $\geqslant 0{,}206$. **669.** 2/3; 4/9. **670.** 1) 1,5; 2) 0,6; 3) 0,5. **671.** Второй. **672.** 0,28 руб. **673.** Второй; 13; 14. **674.** 0,8. **675.** 1 руб. **676.** 1) a;

2) $2a/3$; 3) $2a/3$; 4) $3a/2$. **677.** Нет. Указание: найдите математическое ожидание выигрыша при одном выстреле. **678.** $\approx 1{,}4$.

679.

−1	0	1
0,4	0,1	0,5

. **680.** 7. Указание: X_i — число очков, выпавших при бросании i-й кости, $i=1,2$; X сумма числа очков; $X=X_1+X_2$. **681.** 1,3. См. указание к задаче 680. **682.** 11,8. **683.** 1) $-0{,}1$; 2) $-3{,}9$; 3) 3,3. **684.** 1325 руб. **685.** $\approx 73{,}1$ руб. **686.** 1) Первая; 2) ≈ 20; 3) 5,45. **687.** 1) 0,65; $\approx 0{,}81$; 2) 4,24; $\approx 2{,}06$; 3) 1,65; $\approx 1{,}28$. **688.** p; $p(1-p)$. **689.** 11,25. **690.** 8,4; 1,24; 8,4; 0,64. Второму. **691.** 1) 0,76; 2) 16,72; 3) 16,72. **692.** 23. **693.** 4. **694.** 81 руб. **695.** 1) 0,5; 2) 0,45; 3) $\approx 0{,}67$. **696.** 2,5. **697.** 0,63. **698.** 40,96. **699.** 0,7 или 0,3. **700.** 1) $\leqslant 0{,}64$; $\geqslant \frac{8}{9}$; 2) $\geqslant 20$. **701.** $\geqslant 0{,}56$. **702.** $\geqslant 0{,}881$. **703.** 1) $>0{,}64$; 2) $\leqslant 0{,}36$. **704.** $\geqslant 2000$. Указание: используйте неравенство Чебышева и неравенство $p(1-p)\leqslant 1/4$. **705.** $\geqslant 0{,}75$. См. указание к задаче 704. **706.** $|p-\frac{m}{n}|\leqslant 0.07$. См. указание. к задаче 704. **707.** 2; 1. **708.** $\approx 1{,}56$; $\approx 0{,}469$. **709.** 1,4; 0,7. **710.** 0,4; $\approx 0{,}417$. **711.** ≈ 2; $\approx 2{,}03$.

Учебное изданне

АФАНАСЬЕВА Ольга Николаевна,
БРОДСКИЙ Яков Соломонович,
ГУТКИН Изя Ильич,
ПАВЛОВ Алексaндр Леонндович

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

Заведующий редакцней *А. П. Баева*
Редакторы *В. В. Донченко, И. Е. Морозова*
Младшнй редактор *Н. Ю. Дубкова*
Художественный редактор *Г. М. Каровина*
Техннческий редактор *Е. В. Марозова*
Корректор *Л. С. Самова*

ИБ № 41288

Сдано в набор 11.03.91. Подписаио к печатн 21.10.91. Формат 84×108/32. Бумага тнп. № 2. Гарнитура таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,92. Усл. кр.-отт. 11,13. Уч.-изд. л. 11,05.

Тираж 88400 экз. Заказ № 26

Издательско-производствеиное н книготорговое объединенис «Наука»
Главная редакция фнзико-математнческой лнтературы
117071 Москва В-71, Ленинскнй проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордсна Трудового Красного Знаменн МПО «Первая Образцовая тнпографня» Государствеиного комитета СССР по печати. 113054, Москва, Валовая, 28

Отпечатано в 4-ой типографии издательства «Наука»
630077 Новосибирск 77, Станиславского, 25

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

ВЫХОДИТ ИЗ ПЕЧАТИ

Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л. **Математика для техникумов на базе среднего образования:** Учеб. пособие.— 20 л.—(Аннотированный темплан на 1991 г., поз. 43).

Учебное пособие написано в соответствии с действующей программой по математике для средних специальных учебных заведений на базе средней школы. Оно ориентировано в основном на специальности, где изучение таких дисциплин, как техническая механика, электротехника с основами электроники, теплотехники, основы гидравлики и физическая химия, геодезия составляют базу специальной подготовки учащихся.

Для учащихся техникумов и училищ, обучающихся на базе среднего образования. Может быть использовано в техникумах на базе неполной средней школы, учащимися заочной и вечерней форм обучения, а также лицами, изучающими математику самостоятельно.

Предварительные заказы на данную книгу принимаются без ограничений всеми магазинами Книготорга и Академкниги, распространяющими физико-математическую литературу.

